広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午前）	受験番号	M

令和元年　8月　22日　　　9：00 ～ 12：00

注 意 事 項

1．以下の用紙が配布されている．

問題用紙（表紙を含む）	4　枚
解答用紙	3　枚
下書き用紙	3　枚

2．問題は全部で　3　問ある．

3．問題ごとに必ず一枚ずつ別々の解答用紙を用い，それぞれの解答用紙に問題番号を記入して解答せよ．紙面が不足した場合は裏面を使用してよい．

4．試験問題の表紙，解答用紙，および下書き用紙のすべてに受験番号を記入せよ．

5．試験終了時には，すべての解答用紙および下書き用紙を提出すること．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午前）	令和元年８月実施

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ.

[1] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) 高々 2 次の実係数多項式全体のなす実数 $\mathbb{R}$ 上の線形空間を V とする. ただし多項式の変数は x とする. 以下の問に答えよ.

(1) $T = \{1 + x^2, x + x^2, 1 + x + 3x^2\}$ は V の基底をなすことを示せ.

(2) 線形写像 $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$ は

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi(x^2) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

を満たすとする. (1) で定めた V の基底 T と $\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する φ の表現行列 X を求めよ.

(3) (2) で定めた線形写像 φ の像 $\operatorname{Im}\varphi$ の $\mathbb{R}^3$ における標準内積に関する直交補空間 $(\operatorname{Im}\varphi)^\perp$ を求めよ.

(B) $\mathbb{R}^4$ の 4 個のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

と 4×4 行列

$$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4)$$

を考える. 以下の問に答えよ.

(1) A の階数を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a}_4$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線形結合で表せ.

(3) A のすべての固有値と, 対応する固有空間の基底を一組ずつ求めよ.

(4) A のジョルダン標準形 J と, $P^{-1}AP = J$ となる正則行列 P を求めよ.

(5) 自然数 $k \geq 2$ に対して A^k を求めよ.

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午前）	令和元年８月実施

[2] 次の (A), (B), (C) のすべての問に答えよ．

(A) 以下の問に答えよ．

(1) 正の実数 R に対し，$A_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2+y^2 < R^2,\ x>0,\ y>0\}$ とおく．A_R を極座標を用いて表示せよ．

(2) 次の値を求めよ．

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{A_R} e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$$

(B) $f(x,y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2y - 2y^2 + y$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ となる点 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ をすべて求めよ．

(2) $f(x,y)$ のすべての極値を求めよ．

(C) 以下の問に答えよ．

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^3}{(1+x^2)^{k+1}}$ は $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示し，その和を求めよ．

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^{k+1}}$ は任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して収束することを示せ．

(3) (2) の級数が区間 $[a,\infty)$ で一様収束するための実数 a の条件を求めよ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午前）	令和元年８月実施

[**3**] 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ を通常の位相で位相空間とみなし，その位相（開集合系）を $\mathcal{O}$ と表す．次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) X を位相空間とする．写像 $f_1 : X \to \mathbb{R}$ と $f_2 : X \to \mathbb{R}$ に対し，写像 $f : X \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\} \qquad (x \in X)$$

により定義する．以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}$ の任意の部分集合 U, V に対し，f による $U \cap V$ の逆像 $f^{-1}(U \cap V)$ は

$$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$$

を満たすことを示せ．

(2) 写像 f_1, f_2 が連続ならば，任意の実数 c に対し $\{x \in X \mid f(x) < c\}$ は X の開集合となることを示せ．

(3) 写像 f_1, f_2 が連続ならば，f は連続であることを示せ．

(B) 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合系 $\mathcal{O}_0$ を $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O} \cup \{U \cup \{0\} \mid U \in \mathcal{O}\}$ で定める．以下の問に答えよ．

(1) 部分集合系 $\mathcal{O}_0$ は集合 $\mathbb{R}$ の位相であることを示せ．

(2) 位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_0)$ を $\mathbb{R}_0$ と表す．$\mathbb{R}_0$ は連結でないことを示せ．

(3) 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0$ を $f(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ で定める．f は連続写像でないことを示せ．

(4) 写像 $g : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ を

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

で定める．この写像 g は連続であるが，同相写像ではないことを示せ．但し，$\mathbb{R}_0$ の部分集合 $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ に $\mathcal{O}_0$ に関する相対位相を入れたとき，写像 g を Y 上に制限してできる写像 $h : Y \to \mathbb{R}$ は連続であることは証明なしに用いてもよい．

(5) 位相空間 $\mathbb{R}_0$ は距離づけ可能であることを示せ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	受験番号	M

令和元年　8月　22日　　　　13：30　～　16：30

注　意　事　項

1．以下の用紙が配布されている．

問題用紙（表紙を含む）	9　枚
解答用紙	2　枚
下書き用紙	2　枚

2．問題は全部で　8　問ある．この中から　2　問選んで解答せよ．

3．問題ごとに必ず一枚ずつ別々の解答用紙を用い，それぞれの解答用紙に問題番号を記入して解答せよ．紙面が不足した場合は裏面を使用してよい．

4．試験問題の表紙，解答用紙，および下書き用紙のすべてに受験番号を記入せよ．

5．試験終了時には，すべての解答用紙および下書き用紙を提出すること．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学　専　攻	専門科目（午後）	令和元年８月実施

選択問題：次の [4] ～ [11] の８問中の２問を選んで解答せよ．

［４］ 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) $\mathbb{R}[x]$ を x を変数とする実数体 $\mathbb{R}$ 上の一変数多項式環とする．$r_1, \dots, r_k \in \mathbb{R}[x]$ が生成する $\mathbb{R}[x]$ のイデアルを $(r_1, \dots, r_k)$ で表す．以下の問に答えよ．

(1) $x^3 + x \in (x^2+1)$ が成り立つことを示せ．

(2) $x^3 \notin (x^2+1)$ が成り立つことを示せ．

(3) $\mathbb{R}[x]/(x)$ と $\mathbb{R}$ は環として同型か．証明とともに述べよ．

(4) $\mathbb{R}[x]/(x^2)$ と $\mathbb{R}[x]/(x^2+2x+1)$ を自然な方法で $\mathbb{R}[x]$ 上の加群と見るとき，これらは $\mathbb{R}[x]$ 上の加群として同型か．証明とともに述べよ．

(B) $\mathbb{Z}[x]$ を x を変数とする整数環 $\mathbb{Z}$ 上の一変数多項式環とする．$r_1, \dots, r_k \in \mathbb{Z}[x]$ が生成する $\mathbb{Z}[x]$ のイデアルを $(r_1, \dots, r_k)$ で表す．以下の問に答えよ．

(1) $2x^3 + 12 \in (3, x)$ が成り立つことを示せ．

(2) $1 \notin (3, x)$ が成り立つことを示せ．

(3) $(3, x)$ が $\mathbb{Z}[x]$ の極大イデアルであることを示せ．

(4) $\mathbb{Z}[x]/(3x)$ は加法に関して有限生成群でないことを示せ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	令和元年８月実施

[5] $\mathbb{Q}$ は有理数体，$K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{2}})$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 写像 $\varphi : K \to K$ を，$a, b \in \mathbb{Q}$ として $\varphi(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$ により定義する．φ は K から K への $\mathbb{Q}$ 上の体の同型写像であることを示せ．

(2) $a, b \in \mathbb{Q}$ に対して $\sqrt{a+b\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ となるならば，$\sqrt{a-b\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ となることを示せ．さらにこのとき，$a^2 - 2b^2 = c^2$ となる $c \in \mathbb{Q}$ が存在することを示せ．

(3) L は K の 2 次のガロア拡大であることを示せ．

(4) 拡大次数 $[L : \mathbb{Q}]$ を求めよ．また $\sqrt{3+\sqrt{2}}$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式 $f(x)$ を求めよ．

(5) M を (4) の $f(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上の分解体とするとき，$\sqrt{7} \in M$ となることを示せ．

(6) $\sqrt{6+2\sqrt{7}} + \sqrt{6-2\sqrt{7}} = 2\sqrt{3+\sqrt{2}}$ が成り立つことを示せ．

(7) M を (5) で定めた体とする．$M/\mathbb{Q}$ の中間体 N で $\mathbb{Q}$ 上 4 次拡大であり $\sqrt{2} \notin N$ となるものを一つみつけよ．また，そのみつけた N について，$\sqrt{3+\sqrt{2}}$ の N 上の最小多項式を求めよ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	令和元年８月実施

[6] $\mathbb{R}^3$ の部分集合 X を

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

で定める．$p = (1, 0, 0) \in X$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) M, N を可微分多様体とする．$\phi : M \to N$ を C^∞ 級写像とし，$q \in \phi(M)$ とする．このとき，$\phi^{-1}(q)$ が可微分多様体となるための ϕ と q についての十分条件を一つ挙げよ (証明不要).

(2) C^∞ 級写像 $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$$

で定める．各点 $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ において ϕ の微分 $(d\phi)_{(a,b,c)}$ の階数を求めよ．

(3) X は可微分多様体である．その理由を述べよ．

(4) $\mathbb{R}^3$ の部分集合 $\mathcal{T}_p(X)$ を

$$\mathcal{T}_p(X) = \{c'(0) \in \mathbb{R}^3 \mid c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X : C^\infty\text{級},\ c(0) = p\}$$

で定める．次を示せ．

$$(0, 1, 0),\ (0, 0, 1) \in \mathcal{T}_p(X)$$

(5) (4) で定めた $\mathcal{T}_p(X)$ は $\mathbb{R}^3$ の線型部分空間であることが知られている．$\dim \mathcal{T}_p(X) = 2$ であることを示せ．

(6) C^∞ 級写像 $\psi : X \to \mathbb{R}^2$ を

$$\psi : X \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{1 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 + z^2}} \right)$$

で定める．このとき，$v \in \mathcal{T}_p(X) \setminus \{0\}$ で，次の条件 $(\star)$ を満たすものを一つ挙げよ．

$$(\star) \quad \left\{ \begin{array}{l} C^\infty \text{ 級写像 } c_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X \text{ で,} \\ \qquad c_v(0) = p,\ c_v'(0) = v,\ (\psi \circ c_v)'(0) = (0, 0) \\ \text{となるものが存在する.} \end{array} \right.$$

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学　専　攻	専門科目（午後）	令和元年８月実施

[7] D^2 と S^1 はそれぞれ次で定義される円板と円周を表す.

$$D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}, \quad S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

また，ソリッドトーラス $S^1 \times D^2$ を V で表す．以下の問に答えよ.

(1) ソリッドトーラス V と S^1 がホモトピー同値であることを証明し，それを用いる事により，V の基本群と整数係数ホモロジー群を求めよ．ただし，S^1 の基本群と整数係数ホモロジー群は既知としてよい.

(2) ソリッドトーラス V の連結な 3 重被覆 $p : \tilde{V} \to V$ を一つ構成し，被覆写像 p が誘導する基本群の間の準同型写像を求めよ.

(3) 整数 n に対して，連続写像 $\varphi_n : S^1 \to V$ を $\varphi_n(z) = (z^n, z)$ で定める．φ_n が誘導する基本群の間の準同型写像を求めよ.

(4) (2) の被覆 $p : \tilde{V} \to V$ と (3) の連続写像 $\varphi_n : S^1 \to V$ に対して，次の問に答えよ.

連続写像 φ_n が $\tilde{V}$ への持ち上げ $\tilde{\varphi}_n : S^1 \to \tilde{V}$ を持つための n に関する必要十分条件を求めよ．またその条件が満たされているとき，持ち上げ $\tilde{\varphi}_n : S^1 \to \tilde{V}$ を一つ構成せよ.

(5) (3) の連続写像 φ_n を ∂D^2 から V への連続写像とみなす．円板 D^2 とソリッドトーラス V を φ_n により貼り合わせて得られる空間

$$X_n = (D^2 \sqcup V)/(x \sim \varphi_n(x) \quad (x \in \partial D^2))$$

の整数係数ホモロジー群を求めよ.

(6) 向き付け可能な 3 次元閉多様体 M_n で，(5) の位相空間 X_n を部分空間として含むものを一つ与え，その整数係数ホモロジー群を求めよ.

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学　専　攻	専門科目（午後）	令和元年８月実施

[8] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) Ω を $\mathbb{C}$ の領域とし，$z = x + iy \in \mathbb{C}$ ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$) とする．Ω で定義された複素数値関数 $f(z)$ の実部および虚部をそれぞれ $u(x,y)$, $v(x,y)$ で表す．すなわち，$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$．$f(z)$ は Ω で正則であるとき，以下の問に答えよ．

(1) $u(x,y)$ が Ω で恒等的に定数に等しいならば，f は Ω で定数関数となることを証明せよ．

(2) a と b は実数の定数とする．$(a-ib)f(z)$ の実部を $u(x,y)$, $v(x,y)$, a, b を用いて表せ．

(3) a と b は $a^2+b^2 \neq 0$ を満たす実数の定数とする．$au(x,y)+bv(x,y)$ が Ω で恒等的に定数に等しいならば，f は Ω で定数関数となることを証明せよ．

(B) $z \in \mathbb{C}$ として，積分 $I(z) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ を考える．ただし，t^{z-1} の分枝は $t=1$ で 1 となるものをとる．$\mathrm{Re}\, z$ は z の実部とする．また,「$\mathrm{Re}\, z > 0$ のとき，積分 $I(z)$ は収束して，$\mathrm{Re}\, z > 0$ において z の正則関数である」という事実は用いてよい．以下の問に答えよ．

(1) $z = n$ (ただし n は正の整数) のとき，$I(z)$ を n を用いて表せ．

(2) $\mathrm{Re}\, z > 0$ のとき，$I(z+1) = zI(z)$ を証明せよ．

(3) $\mathrm{Re}\, z > 0$ で $I(z)$ と一致するような $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 $J(z)$ ($z \in \mathbb{C}$) が存在することを証明せよ．

(4) n を非負の整数とするとき，$z = -n$ における (3) の $J(z)$ の留数を求めよ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	令和元年８月実施

［９］ μ を $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度とする．次の (A), (B), (C) のすべての問に答えよ．

(A) $f : [0,1] \to [0,\infty)$ をルベーグ可測関数とする．以下の問に答えよ．

(1) $\mu(\{x \in [0,1] \mid f(x) > 0\}) > 0$ ならば，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx > 0$ が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ ならば，$[0,1]$ 上ほとんどいたる所で $f(x) = 0$ となることを示せ．

(B) $E_1, E_2, E_3, \ldots$ は，$\mathbb{R}$ のルベーグ可測な部分集合の列とする．

(1) $\displaystyle\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$ を示せ．

(2) $\displaystyle\mu(E_k) \leq \frac{1}{k^2}\ (k = 1,2,3,\ldots)$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) = 0$ が成り立つことを示せ．

(C) $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ はルベーグ可測関数で，任意の $x \in [0,\infty)$ に対して $|f(x)| \leq 1 + x$ を満たすとする．以下の問に答えよ．

(1) 任意の $t \in (0,\infty)$ に対して，$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-tx}|f(x)|\,dx < \infty$ が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle g(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} f(x)\,dx\ (t > 0)$ と定義する．g は $(0,\infty)$ 上の連続関数であることを示せ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学　専　攻	専門科目（午後）	令和元年８月実施

［ **10** ］ 確率変数 $X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{n,n}$ は互いに独立で,

$$\mathrm{P}(X_{j,n} = a_n) = 1 - \mathrm{P}(X_{j,n} = 0) = n^{-1}$$

を満たすとする．ここで，$\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は実数列で，すべての $n = 1, 2, \ldots$ に対し，$a_n \neq 0$ とする．

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{j,n}$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) Z_n の平均，分散を n と a_n を用いて表せ．

(2) $X_{1,n}$ の特性関数を n と a_n を用いて表せ．

(3) $n \to \infty$ のとき，$X_{1,n}$ は 0 に確率収束することを示せ．

(4) $a_n = \sqrt{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とする．$n \to \infty$ のとき，Z_n は 0 に確率収束することを示せ．

(5) 平均 λ のポアソン分布の特性関数を求めよ．ただし，平均 λ のポアソン分布の確率関数は

$$f(k; \lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

で与えられる．

(6) $a_n = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とする．$n \to \infty$ のとき，Z_n は平均 1 のポアソン分布に分布収束することを示せ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	令和元年８月実施

[11] 次の (A), (B), (C) のすべての問に答えよ．ただし，常微分方程式の解は実数値関数を考えるものとする．

(A) (1) a を実数の定数とする．このとき，常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = ay$ の解は $y = Ce^{ax}$（C は実数）に限ることを示せ．

(2) a, b を実数の定数とする．このとき，常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = ay + b$ の解をすべて求めよ．

(B) (1) 常に正の値をとる関数 $y(x)$ が常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = y - y^4$ を満たすとき，$z = y^{-3}$ で定義される関数 $z(x)$ は常微分方程式 $\dfrac{dz}{dx} = pz + q$ を満たすという．このような実数の定数 p, q が存在することを示し，p, q を求めよ．

(2) 初期値問題 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - y^4 \\ y(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ の解を一つ求めよ．

（注意：実際には解は一つだけであるが，解の一意性についての議論は必要ない．）

(C) (1) 常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = |y|$ の解をすべて求めよ．

(2) $f(y)$ は $\mathbb{R}$ 上の C^1 級関数であり，$u(x)$ は区間 I 上の常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = f(y)$ の解であり，かつ I 上の定数関数ではないとする．このとき，次の (i), (ii) のいずれか一方が成立することを示せ．

(i) u は I 上で狭義単調増加である．

(ii) u は I 上で狭義単調減少である．