2024年4月入学（April 2024 Admission）
広島大学大学院先進理工系科学研究科博士課程前期（一般選抜）専門科目入学試験問題
問題用紙
Graduate School of Advanced Science and Engineering (Master's Course), Hiroshima University
Entrance Examination Booklet (General Selection)
Question Sheets
（2024年1月25日実施 / January 25, 2024）

試験科目 Subject	情報科学 (専門科目 I) Informatics and Data Science I

プログラム Program	情報科学 Informatics and Data Science	受験番号 Examinee's Number	M

試験時間：9時00分～11時00分　(Examination Time : From 9:00 to 11:00)

受験上の注意事項

1. この問題用紙は表紙を含み5枚あります。
2. 表紙および各ページに，受験番号を記入してください。
3. これは問題用紙です。解答は別冊の解答用紙に記入してください。
4. 解答が書ききれないときは，同じ用紙の裏面を利用しても構いません。ただし，その場合は「裏に続く」などと記入して裏面に記載したことが分かるようにしてください。
5. すべての問題に解答してください。
6. 問題用紙は解答用紙とともに回収します。
7. 質問あるいは不明な点がある場合は手を挙げてください。

Notices

1. There are 5 question sheets including a front sheet.
2. Fill in your examinee's number in the specified positions in this cover and each question sheet.
3. This examination booklet consists of only question sheets. Use other separate sheets for answers.
4. If the space is exhausted, use the reverse side of the sheet and write down "to be continued" on the last line of the sheet.
5. Answer all the questions.
6. Return these question sheets together with the answer sheets.
7. Raise your hand if you have any questions.

2024 年 4 月入学（April 2024 Admission）
広島大学大学院先進理工系科学研究科博士課程前期（一般選抜）専門科目入学試験問題
Graduate School of Advanced Science and Engineering (Master's Course), Hiroshima University
Entrance Examination Booklet (General Selection)

（2024 年 1 月 25 日実施 / January 25, 2024）

試験科目 Subject	情報科学 (専門科目 I) Informatics and Data Science I	プログラム Program	情報科学 Informatics and Data Science	受験番号 Examinee's Number	M

問題 1 (Question 1)

(1) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$ とする．

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$) と定義する．

(1-1) 像 $\operatorname{Im} f$ の次元と 1 組の基底を求めよ．

(1-2) 核 $\operatorname{Ker} f$ の次元と 1 組の基底を求めよ．

(2) B を 3 次元実対称行列とし，以下の (i),(ii) を満たすとする．

(i) B の固有値は $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=5$, $\lambda_3=3$ である．

(ii) $\boldsymbol{u_2}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u_3}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ は，それぞれ固有値 λ_2, λ_3 に対応する固有ベクトルである．

(2-1) 固有値 $\lambda_1=-1$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u_1}$ を求めよ．

(2-2) 行列 B を求めよ．

(1) Let $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

Let $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ be a linear mapping defined by $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$).

(1-1) Find the dimension and a basis of image $\operatorname{Im} f$.

(1-2) Find the dimension and a basis of kernel $\operatorname{Ker} f$.

(2) Let B be a 3-dimensional real symmetric matrix satisfying (i) and (ii) as follows:

(i) The eigenvalues of B are $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=5$, and $\lambda_3=3$.

(ii) $\boldsymbol{u_2}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ and $\boldsymbol{u_3}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ are eigenvectors corresponding to eigenvalues λ_2 and λ_3, respectively.

(2-1) Find an eigenvector $\boldsymbol{u_1}$ corresponding to the eigenvalue $\lambda_1=-1$.

(2-2) Find the matrix B.

2024 年 4 月入学（April 2024 Admission）
広島大学大学院先進理工系科学研究科博士課程前期（一般選抜）専門科目入学試験問題
Graduate School of Advanced Science and Engineering (Master's Course), Hiroshima University
Entrance Examination Booklet (General Selection)
（2024 年 1 月 25 日実施 / January 25, 2024）

試験科目 Subject	情報科学 (専門科目 I) Informatics and Data Science I

プログラム Program	情報科学 Informatics and Data Science	受験番号 Examinee's Number	M

問題 2 (Question 2)

球面上の点 $x^2+y^2+z^2=1$ に対して, 関数 $f(x,y,z)=(x+y)\sqrt{z^2+1}$ の最大値及び最小値を求めよ.

Find the maximum and minimum values of the function $f(x,y,z)=(x+y)\sqrt{z^2+1}$ on the sphere $x^2+y^2+z^2=1$.

試験科目 Subject	情報科学（専門科目 I） Informatics and Data Science I

プログラム Program	情報科学 Informatics and Data Science	受験番号 Examinee's Number	M

問題 3 (Question 3)

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立な確率変数であり，同一のパラメータ $\lambda\ (>0)$ をもつ指数分布に従うものとする．ここで，$X_j\ (j=1,2,\ldots,n)$ の確率密度関数は以下のように与えられる．

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{for } 0 < x < \infty \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(1) $X_j\ (j=1,2,\ldots,n)$ の確率分布関数 $\Pr\{X_j \le x\}$ を求めよ．

(2) 平均 $\mathrm{E}[X_j]$ と分散 $\mathrm{Var}[X_j]$ を求めよ．

(3) $Y = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ で与えられる最大値の確率分布関数を求めよ．

(4) $Z = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ で与えられる最小値の確率分布関数を求めよ．

(5) 2 つの確率変数の和 $X_j + X_{j+1}\ (j=1,2,\ldots,n-1)$ の確率密度関数を求めよ．

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be independent random variables, all exponentially distributed with the same parameter $\lambda\ (>0)$, where the probability density functions of $X_j\ (j=1,2,\ldots,n)$ are given by

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{for } 0 < x < \infty \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(1) Find the probability distribution functions of $X_j\ (j=1,2,\ldots,n)$, $\Pr\{X_j \le x\}$.

(2) Find the mean $\mathrm{E}[X_j]$ and the variance $\mathrm{Var}[X_j]$.

(3) Determine the probability distribution function for the maximum $Y = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

(4) Determine the probability distribution function for the minimum $Z = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

(5) Determine the probability density functions of the sum of two random variables $X_j + X_{j+1}$ $(j=1,2,\ldots,n-1)$.

試験科目 Subject	情報科学 (専門科目 I) Informatics and Data Science I	プログラム Program	情報科学 Informatics and Data Science	受験番号 Examinee's Number	M

問題 4 (Question 4)

集合 X, Y に対して，集合 $X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$ を X, Y の直積という．空でない集合 X に対して，$X \times X$ の部分集合 R を X 上の二項関係といい，$(a.b) \in R$ のとき，aRb と書く．空でない集合 X 上の二項関係 R で以下の (i)〜(iii) を満たすものを同値関係という．

(i) 任意の $x \in X$ に対して，xRx.

(ii) 任意の $x, y \in X$ に対して，xRy ならば yRx.

(iii) 任意の $x, y, z \in X$ に対して，xRy かつ yRz ならば xRz.

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $X = \{0, 1, 2\}, Y = \{a, b\}$ に対して，$X \times Y$ の要素をすべて示せ．

(2) $X = \{0, 1, 2\}$ とする．X 上の二項関係のうち，同値関係でないかつ空集合でないものを理由とともに1つ示せ．

(3) 空ではない集合 X 上の同値関係 R および $x \in X$ に対して，$[x]_R = \{y \in X | xRy\}$ と定義する．このとき，空ではない任意の集合 X 上の任意の同値関係 R に対して，以下の (A), (B) を証明せよ．

(A) 任意の $x, y \in X$ に対して，xRy ならば $[x]_R = [y]_R$ である．

(B) 任意の $x, y \in X$ に対して，$[x]_R \neq [y]_R$ ならば $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$.

For sets X, Y, the set $X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$ is called the Cartesian product of X, Y. For a non-empty set X, a subset R of $X \times X$ is called a binary relation on X, and aRb denotes $(a, b) \in R$. A binary relation R on a non-empty set X is called an equivalence relation if the following (i)–(iii) are satisfied.

(i) For any $x \in X$, xRx.

(ii) For any $x, y \in X$, if xRy then yRx.

(iii) For any $x, y, z \in X$, if xRy and yRz then xRz.

Answer the following questions.

(1) For $X = \{0, 1, 2\}$ and $Y = \{a, b\}$, show all elements in $X \times Y$.

(2) Let $X = \{0, 1, 2\}$. Show one binary relation on X that is neither an equivalence relation nor an empty set, together with the reason.

(3) For an equivalence relation R on a non-empty set X, define $[x]_R = \{y \in X | xRy\}$. Prove the following (A) and (B) hold for any equivalence relation R on any non-empty set X.

(A) For any $x, y \in X$, if xRy then $[x]_R = [y]_R$.

(B) For any $x, y \in X$, if $[x]_R \neq [y]_R$ then $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$.