広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午前）	受験番号	M

平成３０年　8月　２３日　　　　９：００　～　１２：００

注　意　事　項

1．以下の用紙が配布されている．

問題用紙（表紙を含む）	4　枚
解答用紙	3　枚
下書き用紙	3　枚

2．問題は全部で　3　問ある．

3．問題ごとに必ず一枚ずつ別々の解答用紙を用い，それぞれの解答用紙に問題番号を記入して解答せよ．紙面が不足した場合は裏面を使用してよい．

4．試験問題の表紙，解答用紙，および下書き用紙のすべてに受験番号を記入せよ．

5．試験終了時には，すべての解答用紙および下書き用紙を提出すること．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午前）	平成３０年８月実施

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ．

[1] 次の (A), (B), (C), (D) のすべての問に答えよ．

(A) 次の行列の逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(B) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を考える．

(1) A の固有多項式を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ．

(C) A, B を 4 次正方複素行列とし，α, β を相異なる複素数とする．A, B の最小多項式がどちらも $(t-\alpha)^2(t-\beta)^2$ に一致したとする．このとき，ある 4 次正則複素行列 P が存在して $P^{-1}AP = B$ となることを示せ．

(D) s, t, u を任意の実数とする．$f(0) = s$，$f(1) = t$ かつ $\displaystyle\int_0^1 f(x)(\sin x)^{100}dx = u$ を満たす次数が 2 以下の実係数多項式 $f(x)$ がただ一つ存在することを示せ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午前）	平成３０年８月実施

[**2**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) 以下の問に答えよ．

(1) $x \in [1, \infty)$ に対して $\log x \leq 4x^{\frac{1}{4}}$ が成り立つこと，および $x \in (0, 1]$ に対して $|\log x| \leq 4x^{-\frac{1}{4}}$ が成り立つことを示せ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx$, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}\,dx$ の値をそれぞれ求めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x} + x^2}\,dx$ が収束するか否かを判定せよ．

(B) 以下の問に答えよ．

(1) $h = h(s, t)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数とする．もし任意の $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\dfrac{\partial h}{\partial t}(s, t) = 0$ であるならば，$\mathbb{R}$ 上の C^1 級関数 φ が存在して $h(s, t) = \varphi(s)$ $((s, t) \in \mathbb{R}^2)$ が成り立つことを示せ．

(2) a を実定数，$f = f(x, y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数とする．$g(s, t) = f(as + t, s - at)$ $((s, t) \in \mathbb{R}^2)$ と定義するとき，$\dfrac{\partial g}{\partial t}(s, t)$ を f の偏導関数を用いて表せ．

(3) a を実定数，$f = f(x, y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数とする．もし任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ であるならば，$\mathbb{R}$ 上の C^1 級関数 φ が存在して

$$f(x, y) = \varphi(ax + y) \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

が成り立つことを示せ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午前）	平成３０年８月実施

[**3**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) $\mathbb{R}$ を通常の位相で位相空間とみなし，その部分集合

$$X := \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n = 1, 2, \ldots \right\}$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) X は $\mathbb{R}$ の閉部分集合であるか否か，理由を付けて述べよ．

(2) $X \cup \{0\}$ は $\mathbb{R}$ のコンパクト部分集合であるか否か，理由を付けて述べよ．

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続写像とする．X の f による像 $f(X)$ には，最大元または最小元が存在することを示せ．

(B) X を空でない集合とする．X の部分集合族 $\mathcal{O}$ として，$\{U \subset X \mid U^c \text{ は有限集合}\} \cup \{\emptyset\}$ を考える．ただし，U^c は U の X における補集合を表す．以下の問に答えよ．

(1) $\mathcal{O}$ は開集合の公理を満たすことを示せ．

以下，$\mathcal{O}$ によって X に位相を与えたものとする．

(2) X が無限集合であるとき，X の空でない開部分集合 U_1, U_2 に対し，$U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ であることを示せ．

(3) X が無限集合であるとし，$f : X \to \mathbb{R}$ を連続写像とする．ただし，$\mathbb{R}$ には通常の位相が入っているとする．このとき，f は定数写像であることを示せ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学　専 攻	専門科目（午後）	受験番号	M

平成３０年　８月　２３日　　　　１３：３０　～　１６：３０

注　意　事　項

1．以下の用紙が配布されている．

問題用紙（表紙を含む）	9	枚
解答用紙	2	枚
下書き用紙	2	枚

2．問題は全部で　8　問ある．この中から　2　問選んで解答せよ．

3．問題ごとに必ず一枚ずつ別々の解答用紙を用い，それぞれの解答用紙に問題番号を記入して解答せよ．紙面が不足した場合は裏面を使用してよい．

4．試験問題の表紙，解答用紙，および下書き用紙のすべてに受験番号を記入せよ．

5．試験終了時には，すべての解答用紙および下書き用紙を提出すること．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	平成３０年８月実施

選択問題：次の [4] ～ [11] の８問中の２問を選んで解答せよ．

[4] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A)　$\mathbb{C}$ の部分集合 $R := \{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ について，以下の問に答えよ．

(1) R が $\mathbb{C}$ の部分環であることを示せ．

(2) $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ について，$a + b\sqrt{-3} = z(c + d\sqrt{-3})$ となる $z \in R$ が存在するとき，$a^2 + 3b^2$ は $c^2 + 3d^2$ で割り切れることを示せ．

(3) $1 + \sqrt{-3}$ が R の既約元であること，すなわち $z, w \in R$ について $zw = 1 + \sqrt{-3}$ が成り立つとき z または w のいずれかは R の乗法に関する可逆元であることを示せ．

(4) R の単項イデアル $(1 + \sqrt{-3})$ が素イデアルでないことを示せ．

(B) 2 変数多項式環 $\mathbb{R}[x, y]$ から 1 変数多項式環 $\mathbb{R}[t]$ への $\mathbb{R}$ 上の環準同型を

$$\varphi : \mathbb{R}[x, y] \to \mathbb{R}[t]; f(x, y) \mapsto f(t, t)$$

で定める．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $x - y \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ であることを示せ．

(2) $\mathrm{Ker}(\varphi) = (x - y)$ であることを示せ．

(3) $\mathbb{R}[x, y]/(x - y)$ と $\mathbb{R}[t]$ が環として同型であることを示せ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	平成３０年８月実施

[5] $\alpha := \sqrt{5+\sqrt{5}}$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) α を根にもつ $\mathbb{Q}$ 係数の 4 次多項式 f を求めよ．

(2) f は $\mathbb{Q}$ 上既約であることを示せ．

(3) $\mathbb{Q}$ 係数の多項式 $g(t)$ で次数が 3 以下であり，かつ

$$\frac{11}{\alpha+1} = g(\alpha)$$

を満たすものを求めよ．

(4) $\beta := \alpha^3/2 - 3\alpha$ とおく．$\beta = \sqrt{5-\sqrt{5}}$ を示せ．

(5) f の分解体を L とするとき，拡大 $L/\mathbb{Q}$ の拡大次数を求めよ．

(6) 拡大 $L/\mathbb{Q}$ のガロア群は位数 4 の巡回群であることを示せ．

(7) 拡大 $L/\mathbb{Q}$ の中間体をすべて求めよ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	平成３０年８月実施

[6] $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $f(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 + 2{x_2}^2 + 3{x_3}^2$ で定める．

$$S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1\}$$

とし，S^2 の座標近傍系 $\{(U_i^\sigma, \varphi_i^\sigma) \mid \sigma = \pm,\ i = 1, 2, 3\}$ を

$$\begin{aligned}
U_1^\pm &:= \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid \pm x_1 > 0\}, \quad \varphi_1^\pm : U_1^\pm \to \mathbb{R}^2;\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_3), \\
U_2^\pm &:= \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid \pm x_2 > 0\}, \quad \varphi_2^\pm : U_2^\pm \to \mathbb{R}^2;\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_3), \\
U_3^\pm &:= \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid \pm x_3 > 0\}, \quad \varphi_3^\pm : U_3^\pm \to \mathbb{R}^2;\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)
\end{aligned}$$

で定義する．f の S^2 への制限 $f|_{S^2}$ を g とおく．以下の問に答えよ．ただし，座標近傍系 $\{(U_i^\sigma, \varphi_i^\sigma) \mid \sigma = \pm,\ i = 1, 2, 3\}$ のもとで S^2 が 2 次元 C^∞ 多様体となることは断りなく用いてよい．

(1) f の微分 $df_p : T_p\mathbb{R}^3 \to T_{f(p)}\mathbb{R}$ が全射にならない点 $p \in \mathbb{R}^3$ と，その f による像をすべて求めよ．

(2) $g : S^2 \to \mathbb{R}$ は C^∞ 関数であることを示せ．

(3) g の微分 $dg_p : T_pS^2 \to T_{g(p)}\mathbb{R}$ が全射にならない点 $p \in S^2$ と，その g による像をすべて求めよ．

(4) S^2 上の同値関係を

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (x_1', x_2', x_3') \iff (x_1, x_2, x_3) = \pm(x_1', x_2', x_3') \quad ((x_1, x_2, x_3),\ (x_1', x_2', x_3') \in S^2)$$

により定める．S^2 を同値関係 $\sim$ で割って得られる商空間 $S^2/\sim$ を P^2 とおき，自然な射影 $\pi : S^2 \to P^2$ による $p \in S^2$ の像を $[p]$ と表す．$i = 1, 2, 3$ に対して $V_i := \{[p] \mid p \in U_i^+\} \subset P^2$ とおき，$\psi_i : V_i \to \mathbb{R}^2$ を $\psi_i([p]) = \varphi_i^+(p)$ (ただし $p \in U_i^+$) により定める．このとき $\{(V_i, \psi_i) \mid i = 1, 2, 3\}$ は P^2 の座標近傍系を与えることを示し，このもとで P^2 が 2 次元 C^∞ 多様体となることを示せ．

(5) $h : P^2 \to \mathbb{R}$ を $h([p]) = g(p)$ で定める．h は well-defined な C^∞ 関数であることを示せ．

(6) h の微分 $dh_{[p]} : T_{[p]}P^2 \to T_{h([p])}\mathbb{R}$ が全射にならない点 $[p] \in P^2$ と，その h による像をすべて求めよ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	平成３０年８月実施

[7] 位相空間 X とその部分空間 A に対して，X から A へのレトラクションとは，X から A への連続写像でその A への制限が A 上の恒等写像であるものをいう．以下の問に答えよ．ただし D^2 と S^1 はそれぞれ以下で定義される円板と円周を表す．

$$D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqq 1\}, \quad S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

(1) 穴あき円板 $D^2 \backslash \{0\}$ からその部分空間 S^1 へのレトラクション $f : D^2 \backslash \{0\} \to S^1$ を一つ構成し，f がホモトピー同値写像であることを証明せよ．

(2) 弧状連結な位相空間 X から弧状連結な部分空間 A へのレトラクション $f : X \to A$ が誘導する基本群の間の準同型は全射であることを証明せよ．

(3) トーラス $T = S^1 \times S^1$ 上の円周 $S^1 \times \{1\}$ に沿って円板 D^2 を貼り付けて得られる位相空間 $(S^1 \times S^1) \cup (D^2 \times \{1\})$ を X とする．X の基本群を求めよ．

(4) (3) において，位相空間 X から部分空間 T へのレトラクションが存在しないことを証明せよ．

(5) (3) の位相空間 X の整数係数ホモロジー群を求めよ．

(6) (3) の位相空間 X はソリッドトーラス $D^2 \times S^1$ の部分空間である．$D^2 \times S^1$ から X へのレトラクションが存在しないことを証明せよ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	平成３０年８月実施

[8] $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を複素数列とし，$P(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n$ とする．D を $\mathbb{C}$ の領域とし，D 上の正則関数 $f(z)$ に対し，

$$\mathcal{P}f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n f^{(n)}(z)$$

とする．ただし，$f^{(n)}(z)$ は $f(z)$ の n 階導関数とする．以下の問に答えよ．

(1) $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し，以下の条件 (A), (B) が同値であることを示せ．

(A) 任意の $\varepsilon>0$ に対し定数 $C_\varepsilon>0$ が存在し $|a_n|\le C_\varepsilon \dfrac{\varepsilon^n}{n!}$ $(n=0,1,2,\dots)$ を満たす．

(B) $P(\zeta)$ は $\mathbb{C}$ 上正則で，任意の $\varepsilon>0$ に対し定数 $C_\varepsilon>0$ が存在し $|P(\zeta)|\le C_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta|}$ $(\zeta\in\mathbb{C})$ を満たす．

(2) $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が (1) の条件 (A) を満たすとき，$\mathcal{P}f(z)$ は D 上正則となることを示せ．

(3) $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ とする．$g(z)=z^{-1}$ としたとき，$\mathcal{P}g(z)$ が $\mathbb{C}^*$ 上収束するならば，$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は (1) の条件 (A) を満たすことを示せ．

(4) $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は (1) の条件 (A) を満たすとする．$g_w(z)=\dfrac{1}{2\pi i(w-z)}$ とし，$K(w,z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n g_w^{(n)}(z)$ とする．ただし，$g_w^{(n)}(z)$ は $g_w(z)$ の n 階導関数とする．このとき，$a\in D$ に対し

$$\mathcal{P}f(a)=\int_{C(a;r)} K(w,a)f(w)dw$$

となることを示せ．ただし，$r>0$ は $\{z\in\mathbb{C}\mid |z-a|\le r\}\subset D$ となるように取り，$C(a;r)$ は $z=re^{2\pi it}+a$ $(t\in[0,1])$ により定まる曲線とする．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	平成３０年８月実施

[9] 1 次元ルベーグ測度に関する，ルベーグ可測集合 $A \subset \mathbb{R}$ 上のルベーグ可測関数 $f : A \to \mathbb{R}$ の積分を $\int_A f(x)\,dx$ と表す．次の (A), (B), (C) のすべての問に答えよ．

(A) p, q を実数とする．以下の問に答えよ．

(1) 積分 $\displaystyle\int_{(0,1)} x^p\,dx$ の収束・発散を判定せよ．

(2) 区間 $(0,1)$ 上の関数 $x^p(1-x)^q$ がルベーグ可積分であるための実数 p, q の条件を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_{(0,1)} x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}\,dx = \pi$ が成り立つことを示せ．

(B) $f, g : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ を非負ルベーグ可測関数とする．以下の問に答えよ．

(1) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_{(0,+\infty)} f(x)\left(\int_{(x,+\infty)} g(y-x)\,dy\right)dx = \int_{(0,+\infty)}\left(\int_{(0,y)} f(x)g(y-x)\,dx\right)dy$$

(2) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_{(0,+\infty)} f(x)\,dx \int_{(0,+\infty)} g(y)\,dy = \int_{(0,+\infty)}\left(\int_{(0,1)} f(yx)g(y-yx)y\,dx\right)dy$$

(3) $\displaystyle\int_{(0,+\infty)} x^{-1/2}e^{-x}\,dx = \sqrt{\pi}$ が成り立つことを示せ．

(C) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{(0,n)} x^{-1/2}(1-x/n)^n\,dx = \sqrt{\pi}$ が成り立つことを示せ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	平成３０年８月実施

[10] 確率変数 $X_1, \ldots, X_n, \ldots, Y_1, \ldots, Y_n, \ldots$ は独立であるとする．確率変数列 $\{X_n\}$ は同一の確率分布に従い，$0 < p < 1$ が存在して $\mathrm{P}(X_1 = 1) = p$, $\mathrm{P}(X_1 = 0) = 1 - p$ が成り立つとする．また確率変数列 $\{Y_n\}$ は同一の確率分布に従い，Y_1 の平均は 0 で分散は 1 であるとする．ここで，$X_1, \ldots, X_n$ のうち 1 に等しいものの個数を S_n とし，

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} X_k Y_k, \quad Z_n = \sum_{k=1}^{S_n} Y_k$$

とする．以下の問に答えよ．

(1) $X_1 Y_1$ の平均と分散を求めよ．

(2) Y_1 の確率分布が区間 (a, b) 上の一様分布であるとき，a, b の値を求めよ．

(3) 確率変数列 $n^{-2/3} T_n$ は確率収束することを示し，極限を求めよ．

(4) 確率変数列 $n^{-1/2} T_n$ は分布収束することを示し，極限分布を求めよ．

(5) T_n と Z_n は同じ分布に従うことを示せ．

(6) 実数 x に対して極限 $\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\left(Z_n \leq x\sqrt{np}\right)$ を求めよ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	平成３０年８月実施

[11] 2 階線形常微分方程式

$$x''(t) + 2x'(t) + 5x(t) = 0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

を考える．次の問に答えよ．

(1) $(*)$ の解で $x(0) = 1, x'(0) = 3$ を満たすものを求めよ．

(2) $(*)$ の解 $x(t)$ に対し，$y_1(t) = x(t), y_2(t) = px(t) + qx'(t)$ とおく．ただし p, q は定数とする．このときベクトル値関数 $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ が

$$y'(t) = Ay(t) \qquad \cdots\cdots(**) \qquad \text{ただし} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad b \geq 0$$

を満たすように p, q，および上の形の t によらない行列 A を求めよ．

(3) t に依存した行列 $\Phi(t)$ で，$(**)$ の任意の解 $y(t)$ に対し $y(t) = \Phi(t)y(0)$ $(t \geq 0)$ となるものを求めよ．

(4) 常微分方程式系

$$v'(t) = (A + B(t))v(t) \qquad \cdots\cdots(\#)$$

の解 $v(t)$ に対し，$w(t) = \Phi(-t)v(t)$ とおく．$w(t)$ が満たすべき常微分方程式系を導け．ただし，行列 $B(t)$ の各 (i, j) 成分 $b_{ij}(t)$ は $[0, \infty)$ 上で連続とする．

(5) (4) の各 $b_{ij}(t)$ は $[0, \infty)$ 上で可積分とすると (4) で定めた $w(t)$ は $[0, \infty)$ 上で有界であることを示せ．

(6) 半無限区間 $[0, \infty)$ 上で定義された連続関数 $p(t), q(t)$ に対し常微分方程式

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = 0 \qquad \cdots\cdots(\#\#)$$

を考える．関数 $p(t) - 2$, $q(t) - 5$ が $[0, \infty)$ 上で可積分ならば $(\#\#)$ の解 $u(t)$ は $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ を満たすことを示せ．