平成３０年度１０月入学及び平成３１年度４月入学
広島大学大学院理学研究科　入学試験問題

物理科学専攻	専門科目

平成３０年 8月 23日　　１３：３０ ～ １６：３０

注　意　事　項

1. 以下の用紙が配布されている。
   問題用紙（本表紙を含む。）　５枚
   解答用紙　４枚
   下書き用紙　１枚
2. 問題は[I]～[IV]の４問である。全ての問題に解答せよ。
3. 解答は問題ごとにそれぞれの解答用紙に記入せよ。解答の仕方が特に指定されている場合を除き，最終的な答えだけでなく，解答に至った考え方や途中計算も示せ。紙面不足の場合は表面に「裏面に続く」と明記し，裏面に記入せよ。
4. 解答用紙，下書き用紙，すべてに受験番号を記入せよ。
5. 試験終了時には，すべての解答用紙及び下書き用紙を提出せよ。

[I] 力学

図のように，ある慣性系 (x,y,z) の z軸のまわりに一定の角速度 ω で回転している座標系 (X,Y,Z) を考える。時刻 $t=0$ で両者は一致していたとし，ω は図に示された向きを正とする。また，重力などの外力は働いていないものとする。このときの質量 m の質点の運動を考える。以下の問いに答えよ。

(1) x,y,z は X,Y,Z を用いて以下のように表せる。ここで $\boxed{（ア）}$ ～ $\boxed{（エ）}$ には $\sin\omega t$ もしくは $\cos\omega t$ が入る。それぞれ適切なものを入れよ。

$$x=\boxed{（ア）}X-\boxed{（イ）}Y$$
$$y=\boxed{（ウ）}X+\boxed{（エ）}Y$$
$$z=Z$$

(2) 質点の (x,y,z)座標系での速度を $(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$，$(X,Y,Z)$座標系での速度を $(\dot{X},\dot{Y},\dot{Z})$ と表す。このとき，前問(1)の結果を時間で微分することによって $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ を $X,Y,Z,\dot{X},\dot{Y},\dot{Z},\omega,t$ を用いて表せ。

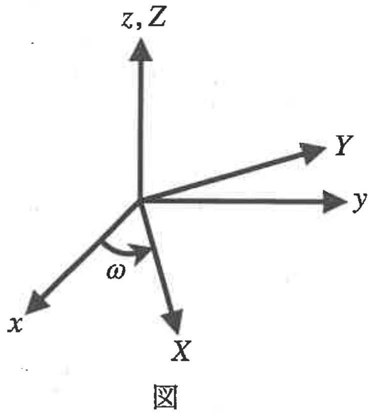
(3) (X,Y,Z)座標系での質点のラグランジアンが以下のように表せることを証明せよ。

$$L=\frac{m}{2}(\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2)-m\omega(\dot{X}Y-\dot{Y}X)+\frac{m}{2}\omega^2(X^2+Y^2)$$

(4) (X,Y,Z)座標系でのオイラー・ラグランジュ方程式をたて，コリオリの力と遠心力の X,Y,Z 成分をそれぞれ求めよ。

(5) (x,y,z)座標系での運動量 (p_x,p_y,p_z) を (X,Y,Z)座標系での正準運動量（一般化運動量）(P_X,P_Y,P_Z) を用いて表せ。

(6) (X,Y,Z)座標系でのハミルトニアンを (x,y,z) 座標系でのハミルトニアン，X,Y,Z，P_X,P_Y,P_Z，及び ω のうち必要なものを用いて表せ。



図

[II] 電磁気学

以下の各問に答えよ。
ただし，無限遠の電位は 0V とする。

図 1 のように，半径 a と b（$a<b$）の十分に薄い同心導体球殻 A，B が真空中（誘電率ε_0）にある。球殻 A と B に電荷 Q_A と Q_B を帯電させた。

（1） 中心から距離 r の点の電場の強さ $E(r)$を求めよ。

（2） 球殻 A と B の電位 V_A と V_B を求めよ。

次に，図 1 の 2 つの球殻の間に誘電率 ε の誘電体を満たした。同心導体球殻 A，B をコンデンサーと考え，以下の問に答えよ。

（3） 球殻 B のみ接地した場合の電気容量を求めよ。

（4） 球殻 B は接地せず，球殻 A のみ接地した場合の電気容量を求めよ。

今度は，図 2 のように半径 a と b（$a<b$）の同心導体球殻 A，B から成るコンデンサーの両極間に，半径 c（$a<c<b$）の同心球面を置き，内側に誘電率ε_1，外側にε_2の誘電体を詰めた。また球殻 A に電荷 Q を帯電させた。

（5） 球殻 B を接地した場合，このコンデンサーの両極間の電位と電気容量を求めよ。

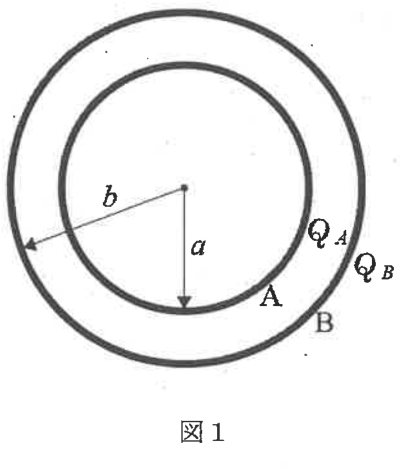


図 1

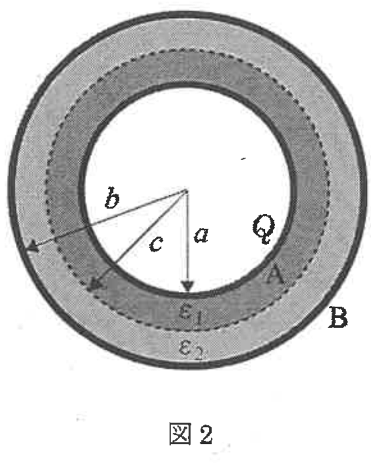


図 2

[III] 熱力学・統計力学

n 個の独立な粒子からなる系を考える。各粒子は $-\varepsilon$, $+\varepsilon$ の二つのエネルギー状態だけ取り得るものとする ($\varepsilon > 0$)。この系の全エネルギー E は整数 m を用いて，$m\varepsilon$ と表される。ここで，m は $-n$ から n の間の値をとる。

n_- 個の粒子が $-\varepsilon$ のエネルギー状態にあり，n_+ 個の粒子が $+\varepsilon$ のエネルギー状態にあるとして，以下の各問いにしたがって温度依存性を考える。なお，$|m|$ と n は十分に大きい数とし，k_B をボルツマン定数とする。

(1) n_- と n_+ を，m と n を用いて表せ。

(2) n 個の粒子の中から，$-\varepsilon$ のエネルギー状態をとる n_- 個の粒子を選び出す場合の数 (多重度) を，m と n を用いて表せ。

(3) このときの系のエントロピー S を，m, n, および k_B を用いて表せ。なお，十分大きな数 N に対するスターリングの近似式 ($\log N! = N\log N - N$) を用いよ。

(4) $\dfrac{\partial S}{\partial E} = \dfrac{1}{T}$ の関係式を用いて，$\dfrac{1}{T}$ を m, n, ε, および k_B を用いて表せ。

(5) (4) の結果から，$m > 0$ のとき $T < 0$ となる。このときの n 粒子系の安定性について簡単に説明せよ。

以下では，$m < 0$ の場合のみを考える。

(6) 任意に取り出した 1 個の粒子が，$-\varepsilon$ の状態に見出される確率と $+\varepsilon$ の状態に見出される確率を，どちらも ε, k_B, および T を用いて表せ。

(7) E を n, ε, k_B, および T を用いて表せ。

[IV] 量子力学

(1) ある軸周りの回転角を θ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$，慣性モーメントを I とし，回転運動に関する，時間によらないシュレディンガー方程式を考える。

$$H_0\psi = E\psi, \qquad H_0 = -\frac{\hbar^2}{2I}\frac{d^2}{d\theta^2}$$

この方程式を解く場合，$\theta = 0$ と 2π での適切な境界を述べるとともに，ハミルトニアン H_0 に対する固有エネルギー $E_n^{(0)}$ と固有関数を求めよ。ただし，$E_0^{(0)}(=0) < E_1^{(0)} < E_2^{(0)} < \cdots$ とし，すべての固有エネルギーと固有関数の一般的な表式を書くこと。また固有関数は正規直交化すること。

(2) (1) で求めた，それぞれのエネルギー準位での縮退の有無を述べよ。

(3) 次に，摂動項 H_1 が加わった方程式を考える。

$$(H_0 + H_1)\psi = E\psi$$

エネルギー $E_n^{(0)}$ をもつ状態に縮退が無い場合，摂動の一次及び二次のエネルギーのずれ ($E_n^{(1)}$ と $E_n^{(2)}$) は以下で与えられることを示せ。

$$E_n^{(1)} = \langle n|H_1|n\rangle, \qquad E_n^{(2)} = \Sigma_k{}' \frac{|\langle k|H_1|n\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}$$

ただし，

$$\langle n|H_1|m\rangle \equiv \int_0^{2\pi} \psi_n^* H_1 \psi_m d\theta$$

であり，記号 $\Sigma_k{}'$ はエネルギー $E_n^{(0)}$ を持つ状態と異なる固有状態 ψ_k 全てに対する和をとることを意味する。

(4) α を定数として摂動項 H_1 が

$$H_1 = \alpha \cos\theta$$

である場合に，基底状態 (エネルギー $E_0^{(0)}$ の状態) のエネルギーのずれ $E_0^{(1)}$ と $E_0^{(2)}$ を求めよ。