平成３１年度広島大学理学部

数学科

第３年次編入学試験学力検査問題

筆記試験（微積分，線形代数）（５問）

平成 30 年 7 月 6 日
自　9 時 00 分
至 12 時 00 分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，微積分と線形代数の問題が**計 5 問**ある。総ページは，表紙を入れて **6 ページ**である。

2　解答用紙は，**5 枚**ある。**解答**はすべて問題番号と同じ番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入すること。

3　下書き用紙は，各受験者に **2 枚**ある。

4　**受験番号**は，すべての解答用紙（1 箇所），下書き用紙（1 箇所）の所定の欄に必ず記入すること。

5　配付した解答用紙，下書き用紙は，持ち出さないこと。

[1] $x \in \mathbb{R}$ に対して，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $x \geqq 1$ のとき，級数は発散することを示せ。

(2) $-1 < x < 1$ のとき，級数が収束するか否かを判定せよ。

(3) $x = -1$ のとき，級数が収束するか否かを判定せよ。

[2] ある島では，天気は「晴れ」と「雨」のみであり，その日の天気は 1 日前の天気によって次のように確率的に決まるという。

- 1 日前の天気が「晴れ」であれば，その日の天気が「晴れ」「雨」である確率はそれぞれ $\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{2}{5}$ である。
- 1 日前の天気が「雨」であれば，その日の天気が「晴れ」「雨」である確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}$ である。

正の整数 n に対して，今日から n 日後の天気が「晴れ」である確率を p_n,「雨」である確率を q_n とする。また，今日が「晴れ」であれば $p_0 = 1, q_0 = 0$ とし，今日が「雨」であれば $p_0 = 0, q_0 = 1$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\boldsymbol{x}_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ とおく。このとき，$\boldsymbol{x}_{n+1} = A\boldsymbol{x}_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ を満たす定数行列 A を求めよ。

(2) (1) で求めた A の固有値をすべて求め，さらに各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。

(3) (1) で求めた A と自然数 n に対して，A^n を求めよ。

(4) 今日の天気が「晴れ」であるときの $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n$ と，今日の天気が「雨」であるときの $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n$ は等しいことを示せ。

[3] $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \big((x,y) \neq (0,0)\big), \\ 0 & \big((x,y) = (0,0)\big) \end{cases}$$

を考える。以下の問いに答えよ。ただし，2 変数関数 $g(x,y)$ に対して，その x, y に関する偏導関数をそれぞれ $g_x(x,y)$, $g_y(x,y)$ と表す。

(1) $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上で連続であることを示せ。

(2) $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上で偏微分可能であることを示し，偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ。

(3) 偏導関数 $f_x(x,y)$ が $\mathbb{R}^2$ 上で連続であるか否かを判定せよ。

(4) 原点における $f_x(x,y)$ の y に関する偏微分係数 $f_{xy}(0,0)$，および原点における $f_y(x,y)$ の x に関する偏微分係数 $f_{yx}(0,0)$ の値をそれぞれ求めよ。

[4] 実 3 次正方行列全体からなる線形空間を M_3 とおき,

$$W = \{X \in M_3 \mid {}^tX = -X\}$$

とおく。ここで，${}^tX$ は X の転置行列を表す。以下の問いに答えよ。

(1) W は M_3 の部分空間であることを示し，W の基底を 1 組挙げよ。

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。このとき,

$$X \in W \text{ ならば } AX - XA \in W$$

であることを示せ。

(3) (2) の A に対し，写像 $f : W \to W$ を $f(X) = AX - XA$ で定める。このとき，f は線形写像であることを示し，(1) で挙げた W の基底に関する表現行列を求めよ。

(4) (3) の写像 f に対し，f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求めよ。

[5] 以下の問いに答えよ。

(1) 次を示せ。

$$\int_a^b \cos\bigl(2\pi(x+y)\bigr)\,dx = \frac{1}{\pi}\sin\bigl(\pi(b-a)\bigr)\cos\left(2\pi\left(y+\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

(2) $a \leqq b$ および $c \leqq d$ を満たす実数 a, b, c, d に対して

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}$$

とする。このとき，二重積分

$$\iint_D \cos\bigl(2\pi(x+y)\bigr)\,dxdy, \quad \iint_D \sin\bigl(2\pi(x+y)\bigr)\,dxdy$$

の値を，それぞれ a, b, c, d を用いて表せ。

(3) (2) の D に対して，

$$\iint_D \cos\bigl(2\pi(x+y)\bigr)\,dxdy = \iint_D \sin\bigl(2\pi(x+y)\bigr)\,dxdy = 0$$

となるための必要十分条件は，$b-a$, $d-c$ のうち少なくとも一方が整数であることを示せ。

(4) 与えられた長方形 R を，辺と頂点以外には互いに共通部分をもたない有限個の長方形 $R_1, \ldots, R_n$ に分割したとき，どの $i = 1, \ldots, n$ に対しても R_i の縦と横の長さの少なくとも一方は整数であった。このとき，R の縦と横の長さの少なくとも一方は整数であることを示せ。