[力学] 解答例

(1)

$$m\frac{d^2x_n}{dt^2}=k\left(x_{n-1}-2x_n+x_{n+1}\right)$$

(2)

$$m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-2&1&0&1\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\1&0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

(3)

$$-m\omega^2\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\\A_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-2&1&0&1\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\1&0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\\A_4\end{pmatrix}$$

ベクトルAが零以外の非自明解を持つ条件は以下の行列式の値が零となること

$$\begin{vmatrix}\frac{m\omega^2}{k}-2&1&0&1\\1&\frac{m\omega^2}{k}-2&1&0\\0&1&\frac{m\omega^2}{k}-2&1\\1&0&1&\frac{m\omega^2}{k}-2\end{vmatrix}=0$$

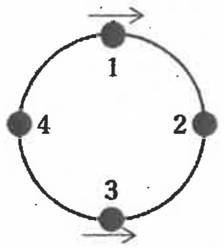
余因子展開すると

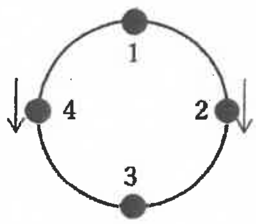
$$\left(\frac{m\omega^2}{k}-2\right)^2\left(\frac{m\omega^2}{k}-4\right)\frac{m\omega^2}{k}=0$$

(4)

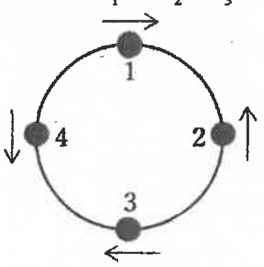
前問から、0でない振動数は、$\omega_1=\sqrt{2k/m}$（重解）、$\omega_2=2\sqrt{k/m}$

ω_1 のとき、$A_1=-A_3,\ A_2=A_4=0$ または $A_2=-A_4,\ A_1=A_3=0$





ω_2 のとき、$A_1=-A_2=A_3=-A_4\neq 0$



[電磁気学]　解答例

(1) 運動エネルギーは速度を動径速度と角速度で表す。運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和は一定であり、電子の初期運動エネルギーが零であることから、両エネルギーの値は等しくなる。

$$K(r)=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$K(r)=e\phi(r)$$

(2) 角運動量の定義と電子が受ける力の積分より

$$L(r)=mr^2\dot{\theta}$$

$$L(r)=\int_{r_1}^{r} r\cdot eB\dot{r}dt=\frac{1}{2}eB\left(r^2-r_1^2\right)$$

(3) 前問(2)より

$$\dot{\theta}=\frac{eB\left(r^2-r_1^2\right)}{2mr^2}$$

前問(1)の２つの式から $K(r)$ を消去した式より

$$\dot{r}=\sqrt{\frac{2e\phi(r)}{m}-\frac{e^2B^2\left(r^2-r_1^2\right)^2}{4m^2r^2}}=\frac{1}{2mr}\sqrt{8me\phi(r)r^2-e^2B^2\left(r^2-r_1^2\right)^2}$$

(4) 最小電圧で陽極Ａに到達する時の動径速度は零となるから

$$\dot{r}(r_2)=0$$

$$V_0=\frac{eB^2\left(r_2^2-r_1^2\right)^2}{8mr_2^2}$$

[熱力学]　解答例

(1) 外部と熱や仕事のやりとりがないので、内部エネルギーUは膨張の前後で不変。理想気体の内部エネルギーは、気体の物質量nが一定なので、$U=\frac{3}{2}nRT$よりTだけの関数。したがって、U不変のときTも不変であり、膨張の前後で温度は不変。

(2) 断熱自由膨張は不可逆変化であり、可逆断熱過程の場合と異なりエントロピーは増大する。エントロピーは状態量なので、始点と終点が同じ等温可逆過程で評価しても同じ変化量ΔSになる。

熱力学第一法則の表式 $dS=\frac{1}{T}dU+\frac{P}{T}dV$ において、等温過程ゆえ$dU=0$なので、$\Delta S=\int_{V_1}^{V_2}\frac{P}{T}dV=\int_{V_1}^{V_2}\frac{1}{T}\frac{nRT}{V}dV=nR\ln\frac{V_2}{V_1}$

(3) (ア)$dU=TdS-PdV$ の両辺を温度一定のもとVで微分すると、

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T-P$$

ここで、マックスウェル関係式 $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T=\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ を用いて、

$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V-P$ を得る。

(イ)3 変数 x,y,z の間に拘束関係$f(x,y,z)=0$があるとき、

一般に、$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=-1$が成り立つ。

U,V,Tにあてはめて、$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U\left(\frac{\partial V}{\partial U}\right)_T=-1$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U=-\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_T\ \frac{1}{C_V}$$

(4) ファンデルワールス状態方程式の両辺をV一定の条件のもとTで微分すると、

$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V(V-nb)=nR$ 、すなわち、$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V=\frac{nR}{V-nb}$

前問(ア)(イ)を用いて、$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U=-\frac{1}{C_V}\left\{T\left(\frac{nR}{V-nb}\right)-P\right\}$

状態方程式より、$T\left(\frac{nR}{V-nb}\right)=P+\frac{n^2}{V^2}a$ なので、$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U=-\frac{1}{C_V}\left(\frac{n^2}{V^2}\right)a<0$

(5) ファンデルワールス気体では理想気体の場合と異なり、気体分子間にはたらくファンデルワールス引力が考慮されている。この引力の効果は、気体の密度が高く分子間の距離が近いときに顕著にあらわれ、希薄な気体ではその効果が小さくなる。膨張により、密度の高い状態から希薄な状態に変化すると、この引力を引き離すエネルギーが要され、気体分子の熱運動のエネルギーの一部がこれに転化され温度が低下する。

[数学] 解答例

(1) $(\vec{v}-\vec{w})$は$\vec{a},\vec{b}$と直交するので、

$$\begin{cases}(\vec{v}-\vec{w})\cdot\vec{a}=0\\(\vec{v}-\vec{w})\cdot\vec{b}=0\end{cases}$$

$\vec{w}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$を代入して、

$$\begin{cases}\vec{v}\cdot\vec{a}-\alpha|\vec{a}|^2-\beta(\vec{a}\cdot\vec{b})=0\\\vec{v}\cdot\vec{b}-\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})-\beta|\vec{b}|^2=0\end{cases}$$

α,βについて連立方程式を解くと、

$$\alpha=\frac{|\vec{b}|^2(\vec{v}\cdot\vec{a})-(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{v}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\text{、}\beta=\frac{|\vec{a}|^2(\vec{v}\cdot\vec{b})-(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{v}\cdot\vec{a})}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

(2) λの固有方程式は、

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&1&3\\1&5-\lambda&1\\3&1&1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&1&3\\1&5-\lambda&1\\3&1&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2-\lambda&0&2+\lambda\\1&5-\lambda&1\\3&1&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda+2)\begin{vmatrix}5-\lambda&1\\1&1-\lambda\end{vmatrix}+(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&5-\lambda\\3&1\end{vmatrix}$$

$=-(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-6)$ なので、固有値は$\lambda=-2,3,6$

$\lambda=-2$に対して、$(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E})\vec{v}=\begin{bmatrix}3&1&3\\1&7&1\\3&1&3\end{bmatrix}\vec{v}=0$を満たす$\vec{v}$は、

$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$の任意定数倍のベクトルであり、規格化したベクトルは、$\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

同様に、$\lambda=3$に対して$\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$、$\lambda=6$に対して$\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$を得る。

(3) 与えられた式を書き直すと、

$(\cos y+y\cos x)dx-(x\sin y-\sin x)dy=0$

$\frac{\partial}{\partial y}(\cos y+y\cos x)=\frac{\partial}{\partial x}(x\sin y-\sin x)$が成り立つので、

方程式左辺はある関数Uの完全微分であることが確かめられる。

$dU=(\cos y+y\cos x)dx-(x\sin y-\sin x)dy=0$

$\frac{\partial U}{\partial x}=\cos y+y\cos x$、$\frac{\partial U}{\partial y}=-x\sin y+\sin x$を満たすUは、

$\mathrm{U}=x\cos y+y\sin x$であり、$dU=d(x\cos y+y\sin x)=0$

したがって、一般解は、$x\cos y+y\sin x=C$ (C:積分定数)

(4) $d\theta$に対する線素dsは、$ds=\sqrt{(rd\theta)^2+\left(\frac{dr}{d\theta}d\theta\right)^2}=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta$

$r=ae^{b\theta}$、$\frac{dr}{d\theta}=abe^{b\theta}$ より、$ds=a\sqrt{1+b^2}e^{b\theta}d\theta$

曲線長さℓは、$\ell=\int ds=\int_0^{2\pi}a\sqrt{1+b^2}e^{b\theta}d\theta=\frac{a\sqrt{1+b^2}}{b}(e^{2\pi b}-1)$

(5)(ア) $\mathrm{div}\,\vec{A}=\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right)\cdot\vec{A}=z^2+z^2+(x^2+y^2)$

$=x^2+y^2+2z^2$

(イ) ガウス定理より$\iint_S\vec{A}\cdot d\vec{S}=\iiint_V\mathrm{div}\,\vec{A}\,dV$

極座標に移ると、$\mathrm{div}\,\vec{A}=r^2+r^2\cos^2\theta$、$dV=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$

$\iint_S\vec{A}\cdot d\vec{S}=\iiint_{\text{単位球内}}r^4(1+\cos^2\theta)\sin\theta drd\theta d\varphi$

$=\int_0^1r^4dr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}(1+\cos^2\theta)\sin\theta d\theta=\frac{2\pi}{5}\int_{-1}^{1}(1+t^2)dt=\frac{16\pi}{15}$