平成 31 年度入学試験問題

数　　学

数学Ⅰ，数学Ⅱ，
数学A，数学B

平成 31 年 2 月 25 日
自　9 時 00 分
至 11 時 00 分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学A，数学B（数列，ベクトル）の問題が **4 問**あります。総ページは **11 ページ**で，問題は 4 ページ以降の偶数ページにあります。

2　解答用紙は **4 枚**です。解答はすべて**対応する番号の解答用紙**の所定の**解答欄**（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。

3　**受験番号**は，それぞれの解答用紙の所定の欄（**2 ヶ所**）に必ず記入しなさい。

4　試験終了後は，**解答用紙の右上の番号の順**に並べなさい。

5　配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

6　試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

空　白

空　白

〔 1 〕　$a>0$，$r>0$ とし，数列 $\{a_n\}$ を初項 a，公比 r の等比数列とする。また，数列 $\{b_n\}$ は次のように定義される。

$$b_1 = a_1, \quad b_{n+1} = b_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1) b_n を a，r および n を用いて表せ。

(2) 一般項が

$$c_n = \frac{\log_2 b_n}{n}$$

である数列 $\{c_n\}$ は等差数列であることを証明せよ。

(3) (2) で与えられた数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの平均を M_n とする。すなわち，

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k$$

とする。このとき，一般項が

$$d_n = 2^{M_n}$$

である数列 $\{d_n\}$ は等比数列であることを証明せよ。

空　白

〔２〕　n を自然数とし，p を $0 < p < 1$ を満たす実数とする。一方の面に 0，もう一方の面に 1 と書いたカードがある。最初，このカードは 0 と書かれた面が上になるように置いてある。表の出る確率が p のコインを投げ，裏が出たときだけカードを裏返すという試行を n 回繰り返して行う。n 回の試行の後，カードの上の面に書かれた数字が 0 である確率を P_n とおく。次の問いに答えよ。

(1) P_n を p および n を用いて表せ。

(2) $n \geqq 2$ とする。n 回の試行の後，カードの上の面に書かれた数字が 0 であり，さらに，途中でカードが少なくとも 1 回裏返されたことがわかっている。このとき，ちょうど 2 回裏返された確率を p および n を用いて表せ。

空　白

〔 3 〕　座標平面上の二つの曲線

$$C \;:\; y = x^3, \quad C' \;:\; y = 8x^3$$

と曲線 C 上の点 $\mathrm{P}_1(1,1)$ を考える。点 P_1 を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_1 とし，点 Q_1 を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_2 とする。次に，点 P_2 を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_2 とし，点 Q_2 を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_3 とする。このように，自然数 n に対して，点 P_n を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_n とし，点 Q_n を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_{n+1} とする。点 P_n の x 座標を a_n とおく。次の問いに答えよ。

(1) a_n を n を用いて表せ。

(2) 点 P_{n+1} における曲線 C の接線，直線 $x = a_n$ および曲線 C で囲まれる部分のうち，$a_{n+1} \leqq x \leqq a_n$ の領域にある面積を S_n とする。S_n を n を用いて表せ。

(3) $T_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ とおく。T_n を n を用いて表せ。

空　白

〔４〕　原点を O とする座標平面上において，点 $A(0,3)$，$B(0,-1)$ および x 軸上の正の部分を動く点 $P(t,0)$ があり，$\angle APB$ は鈍角でないとする。$\triangle ABP$ の垂心を H，頂点 A から辺 BP に下ろした垂線と辺 BP との交点を D，頂点 B から辺 PA に下ろした垂線と辺 PA との交点を E とする。次の問いに答えよ。ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。その交点のことを，三角形の垂心という。

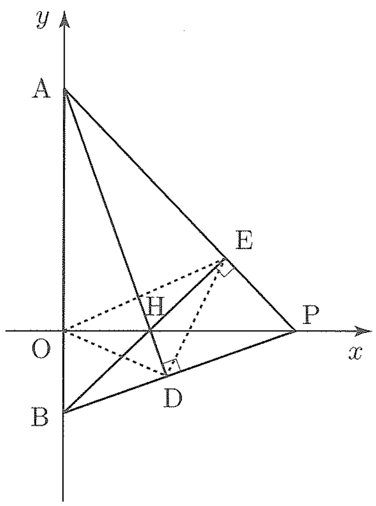
(1) $\angle APB$ が直角となる t の値を求めよ。

(2) 点 H の座標を t を用いて表せ。

以下では，t が (1) で求めた値よりも大きい値をとるとする。

(3) 点 H が $\triangle ODE$ の内心であることを証明せよ。ただし，1 組の対角の和が $180°$ である四角形は円に内接することを，証明なしに利用してもよい。

(4) $\triangle ODE$ の内接円の半径を t を用いて表せ。



空　白