理学部　数学科
学力検査問題

数　学

数学 I，数学 II，数学 III，

数学 A，数学 B

平成３１年３月１２日

自　9 時 00 分

至　11 時 30 分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，数学 I，数学 II，数学 III，数学 A，数学 B（数列，ベクトル）に関する問題が **5問** あります。総ページは**１３ページ**で，問題は４ページ以降の偶数ページにあります。

2　解答用紙は**５枚**です。解答はすべて**対応する番号の解答用紙**の所定の**解答欄**（表面）に記入しなさい。

3　**受験番号**は，それぞれの解答用紙の所定の欄に必ず記入しなさい。

4　試験終了後は，**解答用紙の左上の番号の順**に並べなさい。

5　配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

空　白

空 白

[1] 複素数 α, β, γ が表す複素数平面上の点を，それぞれ，A，B，C とし，複素数平面の原点を O で表す。ただし，$\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$, $\mathrm{A} \neq \mathrm{O}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 方程式 $\dfrac{z}{\alpha} + \dfrac{\overline{z}}{\overline{\alpha}} = 1$ を満たす複素数 z が表す点の複素数平面上の軌跡は，線分 OA の垂直二等分線であることを示せ。

(2) $|\alpha| = |\beta| = 1$ とする。複素数平面上において，直線 AB 上の点を表す複素数 z は，方程式 $z + \alpha\beta\,\overline{z} = \alpha + \beta$ を満たすことを示せ。

(3) $|\alpha| = |\beta| = 1$ とする。複素数平面上において，点 C を通り直線 AB に垂直な直線上の点を表す複素数 z は，方程式 $z - \alpha\beta\,\overline{z} = \gamma - \alpha\beta\,\overline{\gamma}$ を満たすことを示せ。

空　白

[2] 座標平面上を運動する点$\mathrm{P}(x(t), y(t))$の座標が，次のように与えられているとする。

$$(x(t), y(t)) = (F(t)\cos t, F(t)\sin t)$$

ここで，$F(t) = \displaystyle\int_0^t e^\theta \sin\theta\, d\theta$とする。以下の問いに答えよ。

(1) $t = 0$，$t = \dfrac{\pi}{4}$，$t = \dfrac{\pi}{2}$における点Pの座標をそれぞれ求めよ。

(2) $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$のとき，$x(t) > 0$，$y(t) > 0$，$\dfrac{dy(t)}{dt} > 0$であることを示せ。

(3) 変数tが$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$の範囲を動くときPによって描かれる曲線と，$y$軸によって囲まれる図形の面積は，次の定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\frac{dy(t)}{dt}\, dt$$

の値と等しいことを示せ。

空　白

[3] 座標平面上の点 A$(1, 2)$ と点 B$(-1, -2)$ からの距離の差が 2 であるように動く点が描く双曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) 変数 t を実数として，x 軸上の点 Q$(t, 0)$ を考える。線分 AQ の長さと線分 BQ の長さの差を $g(t)$ とする。極限値

$$\lim_{t\to\infty} g(t)$$

を求めよ。

(2) 双曲線 C の方程式を求めよ。ただし，答えは

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

（a, b, c, d, e, f は実数）の形に書くこと。

(3) 方程式 $y = mx$ で表される直線と，双曲線 C が共有点を持つような実数 m の範囲を求めよ。

空　白

[4] 各自然数 n に対して，初項 $n-1$，公差 2 の等差数列を考える。この等差数列の最初の n 項の和を a_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) a_n を n の式として表せ。

(2) 自然数 $k \geqq 1$ に対して，数列 $\{a_n\}$ の和

$$S(k) = \sum_{n=1}^{k} a_n$$

を k の式として表せ。

(3) $S(k)$ を (2) で定めた和とする。次の等式

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{\log m} \sum_{k=2}^{m} \frac{k^2}{S(k)} = \frac{3}{2}$$

を示せ。

空　白

[5] 一つの面が赤，もう一つの面が黒に塗られたカード1枚が，赤い面を上にして置いてある。また，点 Q は数直線上の原点にある。カード面の色に応じて，次の操作を繰り返し行う。

- カードが赤い面を上にして置かれているとき，表の出る確率が $\dfrac{1}{10}$ のコインを投げる。コインの表が出ればカードをひっくり返し，点 Q を正の方向に 1 動かす。コインの裏が出ればカードはそのままにして，点 Q は動かさない。
- カードが黒い面を上にして置かれているとき，表の出る確率が $\dfrac{2}{5}$ のコインを投げる。コインの表が出ればカードをひっくり返し，点 Q は動かさない。コインの裏が出ればカードはそのままにし，点 Q を負の方向に 1 動かす。

上記のいずれの操作においても，コインを投げるときコインの表が出るか裏が出るか，必ずどちらか一方が起こるものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対し，上の操作を n 回繰り返した後，カードが赤い面を上にして置かれている確率を P_n とする。P_{n+1} を P_n を用いて表せ。

(2) P_n を (1) で定めた確率とする。P_n を n を用いて表し，極限値

$$\lim_{n\to\infty} P_n$$

を求めよ。

(3) 上の操作を 2 回繰り返した後，点 Q が原点にある確率を求めよ。

(4) 上の操作を 2 回繰り返した後，点 Q が原点にあるとする。この条件のもとで，カードが赤い面を上にして置かれている確率を求めよ。

空　白