平成 31 年度　広島大学一般入試

後期日程

理学部物理学科
総　合　問　題

平成 31 年 3 月 12 日
自　　9 時 00 分
至　11 時 30 分

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけない。
(2) 以下の用紙が配付されている。確認すること。
　　問題冊子（表紙を含む）　　6 枚（本表紙を含めて 12 ページ）
　　解答用紙　　4 枚
　　下書き用紙　　4 枚
(3) 問題は全部で［Ⅰ］～［Ⅳ］の 4 問ある。全問に解答すること。
(4) すべての解答用紙に受験番号を記入すること。
(5) 解答はすべて対応する解答用紙に記入すること。
(6) 解答用紙はすべて提出すること。
(7) 下書き用紙と問題用紙は持ち帰って良い。
(8) 解答用紙の注意事項もよく読むこと。

このページは白紙です。

[Ⅰ]（配点　150点）

以下の問い (問1 ～ 3) に答えよ。

問1　複素数に関する以下の問いに答えよ。ただし，iは虚数単位とする。

(1) 複素数$z = x + iy$ (x, yは実数) の共役複素数を$\bar{z}$とする。xとyをzと$\bar{z}$を用いて表せ。

(2) 問 (1) の複素数zの絶対値をxとyを用いて表せ。

(3) 方程式$z^3 = 8$の3つの解を求めよ。

(4) 任意の自然数nに対して次式が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

問2　以下の定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x} dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x} dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2} dx$

問3　点Pの位置ベクトルの成分x, y, zが時刻tを媒介変数として

$$\begin{aligned} x(t) &= t^3 + t \\ y(t) &= \sqrt{3}t^2 \\ z(t) &= 2\sqrt{2}t \end{aligned}$$

で表されている。

(1) 時刻tにおける点Pの速度ベクトル $\vec{v}$ の成分と大きさを求めよ。

(2) 時刻tにおける点Pの加速度ベクトル $\vec{a}$ の成分と大きさを求めよ。

(3) 点Pが時刻$t = 0$から$t = 1$までに移動した道のり（軌道の長さ）sを求めよ。

［II］（配点　150 点）

水平でなめらかな床の上に原点Oとx軸をとり，床に垂直にz軸をとる。図1のように，x軸とz軸を含む鉛直面内に半径Rの2つの四分円の弧AB（中心をQとする）とBCからなる，なめらかなレールを置き，その上で質量mの小球を滑らせる。レールは点Bでz軸と垂直に交わり，点Cは床の上にある。小球の位置を点Pとするとき，点Pが弧AB上にあるときは図1のように線分PQとBQのなす角θ $(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2})$でその位置を表し，点Pが弧BCの上にあるときは図2のように線分POとBOのなす角ϕ $(0 \leqq \phi \leqq \frac{\pi}{2})$でその位置を表す。重力加速度の大きさを$g$とする。空気抵抗は無視できるものとする。角度はラジアンで表すものとして，以下の問い（問1～5）に答えよ。

問1　$\theta = \theta_0$ $(0 < \theta_0 \leqq \frac{\pi}{2})$で小球をレールの上で静かに放した。$0 \leqq \theta \leqq \theta_0$を満たす$\theta$での小球の速さを求めよ。

問2　θ_0がある角度以上なら，図1の点線で示すように小球は点Bでレールから離れる。その場合に，小球がレールから離れる時刻$t = 0$から最初に床に衝突するまでの間の小球の位置座標$x(t)$，$z(t)$を求めよ。

問3　問2で小球は，最初に床に衝突した後はね上がり，再び床に衝突した。2度目の衝突をしたときの小球のx座標を求めよ。ただし，小球と床の間の反発係数（はね返り係数）を$\frac{1}{2}$とする。

問4　小球が問2のように点Bでレールから離れるためにはθ_0がある角度θ_1以上である必要がある。θ_1を求めよ。

問5　$\theta_0 < \theta_1$のときは，図2の点線で示したように小球は弧BC上のある角度ϕ_0でレールから離れる。このときの$\cos\phi_0$を表す式を求めよ。

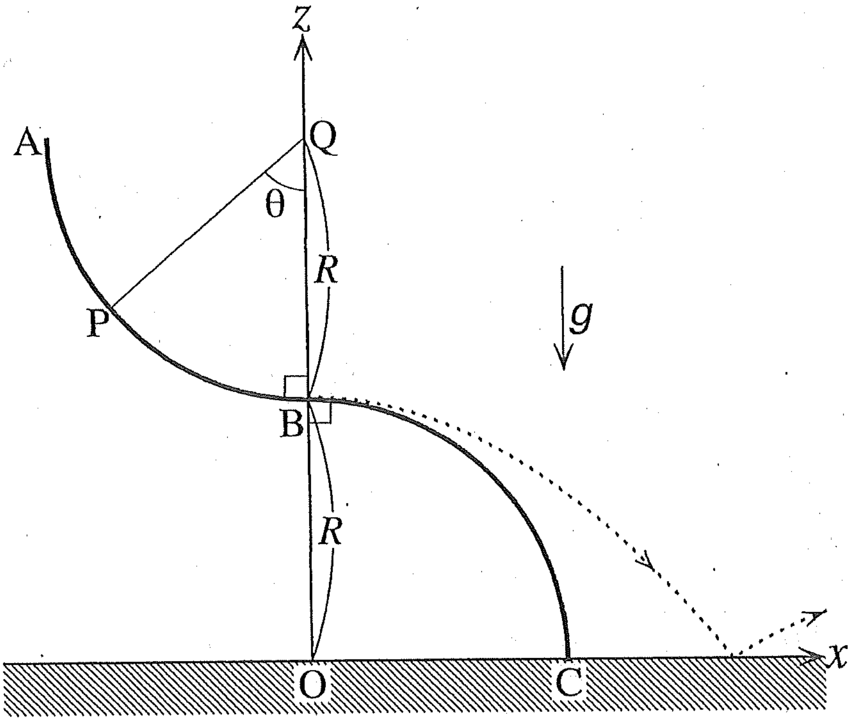


図 1

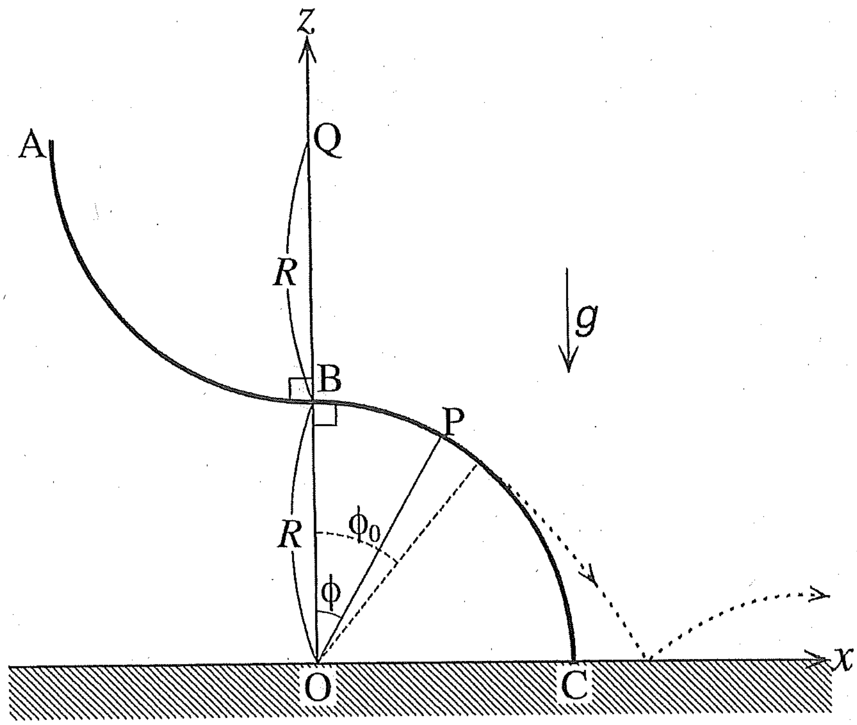


図 2

［Ⅲ］（配点　150 点）

図 1 のように，面積 S，巻き数 1 のコイル，抵抗値 R の抵抗，それらをつなぐ導線からなる回路がある。コイルは，コイル面に垂直で一様な磁場の中にあり，その磁束密度 B は時刻 t とともに変化している。以下の問い（問 1，問 2）に答えよ。ただし，コイルや導線の抵抗は無視できる。また，電流のつくる磁場の影響も無視できるものとする。

問1　磁束密度が $B = B_0 t$ で変化する場合を考える。$B_0 > 0$ とする。

（1）コイルに生じる誘導起電力の大きさを求めよ。

（2）電流 I が流れる向きは図 1 中の㋐，㋑のどちらか。その記号（㋐または㋑）を記せ。また，抵抗に流れる電流 I の大きさを求めよ。

問2　次に，磁束密度が $B = B_0 \sin\omega t$ で変化する場合を考える。ここで，$B_0 > 0$ であり，ω は角周波数である。

（1）コイルに生じる誘導起電力の大きさを求めよ。導出には微分を用いても良い。

（2）㋐の向きの電流を正とするとき，抵抗に流れる電流 I と磁束密度 B の位相の差について，式を用いて簡潔に説明せよ。

（3）抵抗で消費される電力の瞬間値（瞬時値）を求めよ。

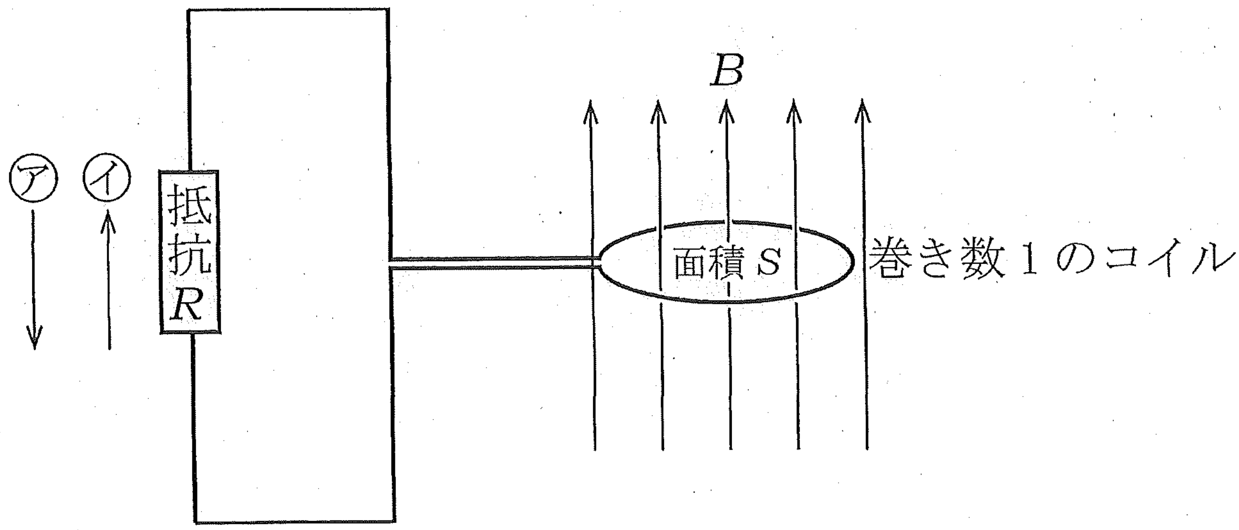


図 1

このページは白紙です。

[IV]（配点　150 点）

以下の問い（問１，問２）に答えよ。

問１　図１のように，平面波の光がスリット A，B をもつ遮光板に入射したところ，後方のスクリーンに干渉縞ができた。光の波長を λ，スリット A，B 間の距離を d，遮光板とスクリーンの間の距離を L とする。スリット A，B から等距離にあるスクリーン上の点を O とする。点 O 上にはなく，点 O に最も近い明線と点 O の距離を x とする。d，x は L に比べて十分に小さいものとする。以下の問（１）～（３）に答えよ。ただし，必要に応じて以下の近似式を用いてよい。

近似式：　$|a|$が１より十分小さいとき，$(1+a)^n \fallingdotseq 1+na$　（n は定数）
　　　　　$|\theta|$が十分小さいとき，$\sin\theta \fallingdotseq \tan\theta \fallingdotseq \theta$

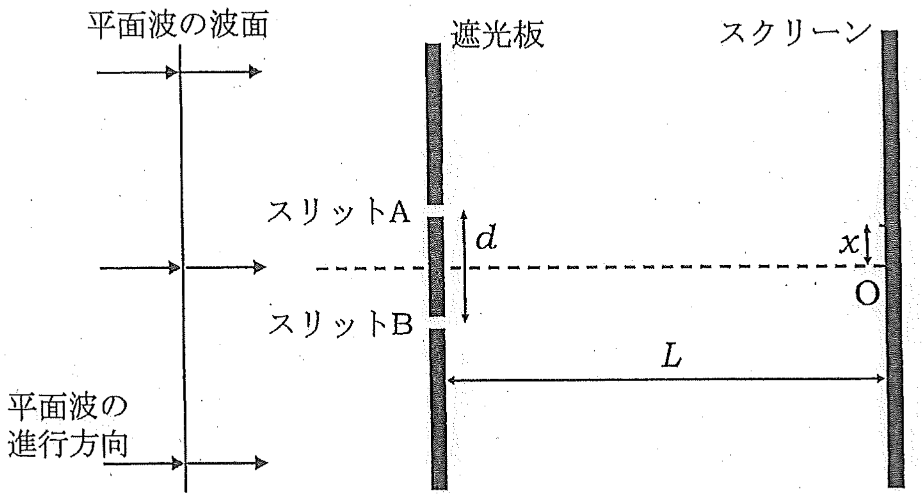


図１

（１）　平面波は波面を平面状に保ったまま進む。この性質をホイヘンスの原理を用いて説明せよ。必要なら波面の各点からの素元波を図示しても良い。

（２）　平面波の波面が遮光板に平行であるとき，x を求めよ。導き方も記せ。

（3）　実際に x の値を測定したところ，問（2）で求めた x よりもわずかに Δx だけ大きくなっていた。このずれが生じたのは，図２のように，平面波の波面が遮光板に対して小さい角度 α だけ傾いていたためと考えられる。このとき，α を求めよ。導き方も記せ。ただし，Δx は x に比べて十分小さいものとする。

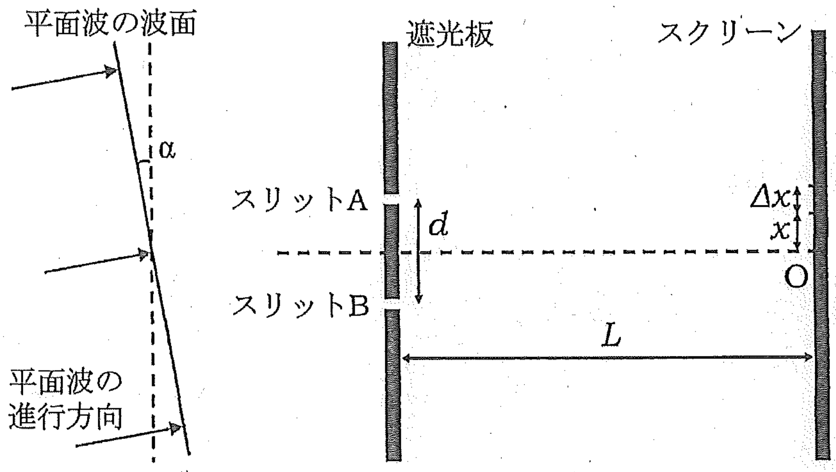


図２

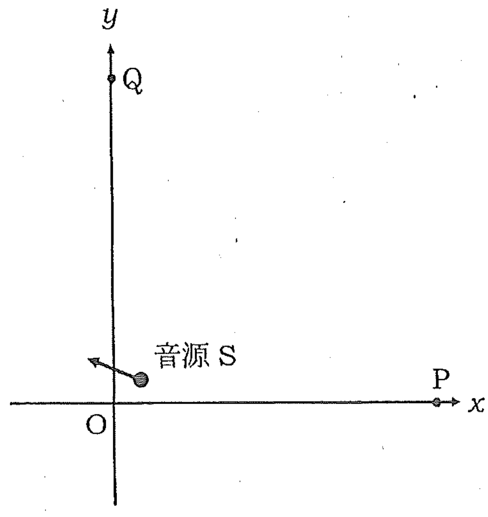
問２　ドップラー効果に関する発展的な問題として，音源と観測者の移動する方向が一直線上にない場合を考える。このとき，ドップラー効果は音源と観測者を結ぶ方向の速度成分を用いて考えればよい。図３のように，座標の原点Ｏ付近に，周波数 f_0 の音波を出す音源Ｓがある。音源Ｓから十分に離れ，x 軸上の点Ｐと y 軸上の点Ｑで音波の周波数を測定したところ，図４のように，時刻 t と共に周期的に周波数が変化していることがわかった。ここで，f_P，f_Q はそれぞれ点Ｐ，Ｑで観測された周波数である。f_P，f_Q は周期 T の正弦曲線を用いてよく表すことができ，図４中の f_1 は f_0 と比べて十分小さかった。OP，OQ の長さは共に r，音速は V とする。音源Ｓと原点の距離は r に比べて無視でき，音源Ｓの移動する速さは V を超えないものとする。また，風は吹いていないものとする。　以下の問（１）～（３）に答えよ。ただし，必要に応じて以下の近似式を用いてよい。

近似式：　$|a|$が１より十分小さいとき，$(1+a)^{-1} \fallingdotseq 1-a$

（１）　図４から，f_P を時刻 t の関数として表せ。ただし，三角関数を用いよ。

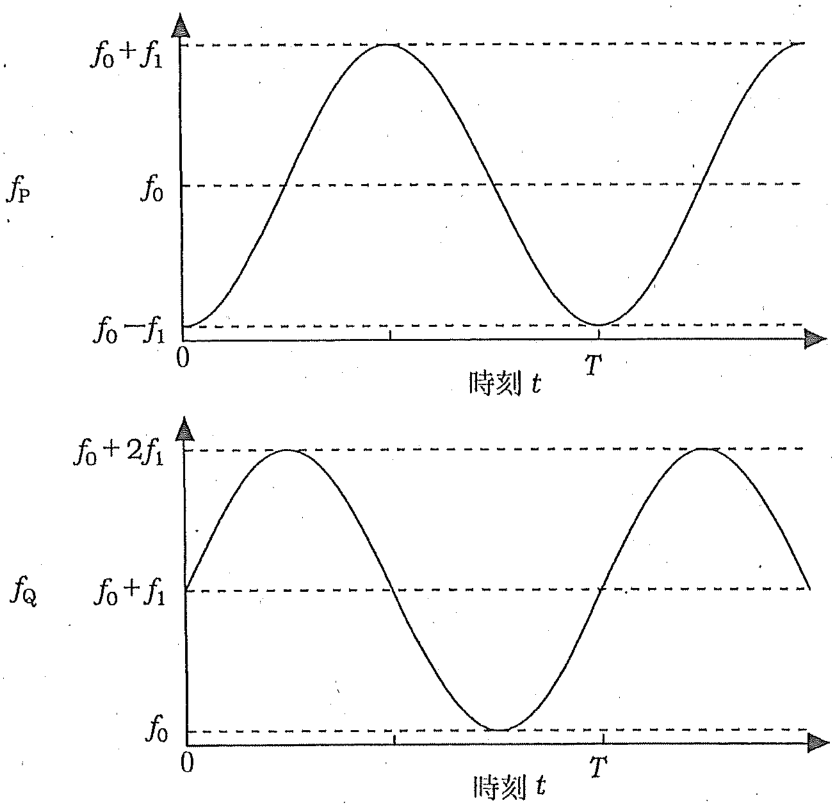
（２）　音源Ｓの速度の x 成分を時刻の関数として表せ。導き方も記せ。

（３）　音源Ｓの運動は回転運動と並進運動の重ね合わせで表現できる。f_0 と比べて f_1 が十分小さいことを考慮して，音源Ｓの回転運動の速さ v_1 と並進運動の速さ v_2 を求めよ。導き方も記せ。また，それぞれの速度の向きを解答用紙に図示せよ。



y
Q
音源 S
P
x
O

図３



f_0+f_1
f_{P}
f_0
f_0-f_1
0
T
時刻 t
f_0+2f_1
f_{Q}
f_0+f_1
f_0
0
T
時刻 t

図４

このページは白紙です。