2020年度　第3年次編入学試験　筆記試験問題

情報科学部　情報科学科

実施期日　：　2019年9月18日（水）
試験時間　：　10時00分～12時00分

注意事項

1　この問題用紙には，微分積分，線形代数，確率・統計
の範囲の問題が **4 問**あります。総ページは **9 ページ** です。

2　解答用紙は **4 枚** (表面) あります。**解答** はすべて解答用紙の
所定の場所に記入しなさい。

3　**受験番号** は，すべての解答用紙の所定の欄に必ず記入しなさい。
解答用紙は持ち帰ってはいけません。

4　試験終了後は，**解答用紙の左上の番号の順**に並べなさい。

5　問題用紙は持ち帰ってください。

6　受験票，筆記用具，定規，時計以外の所持品は，机の下に置いて
ください。また，時計のアラームを使用してはいけません。

[**1**] 以下の問いに答えよ．

a. 以下の微分方程式を解け．

$$(1-x^2)f''(x) = xf'(x), \quad f(0)=0, \quad f'(0)=1$$

ただし，$|x|<1$ である．

b. 以下で与えられる行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ の行列式を計算せよ．

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{bmatrix}$$

c. パラメータ $\lambda > 0$ を持つポアソン分布 $P(X=k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$(k=0,1,\ldots)$ の期待値 $E[X]$，分散 $V[X]$ を求めよ．

空　欄

[2] 以下の問いに答えよ．

a. $\boldsymbol{C}^2$ 級の関数 $f(x,y)$ について，$\phi(u,v)=e^{au+bv}$，$\psi(u,v)=e^{-bu+av}$，$F(u,v)=f(\phi(u,v),\,\psi(u,v))$ とする．ただし，$a>0$，$b>0$，$a^2+b^2=1$ とする．

(1) $\dfrac{\partial F}{\partial u}$，$\dfrac{\partial F}{\partial v}$ を $f(x,y)$ の偏導関数を用いて表わせ．

(2) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}$ を $f(x,y)$ の偏導関数を用いて表わせ．

b. $D=\{(x,y):0\leq 2x+y\leq a,\,x\geq 0,\,y\geq 0\}$，$E=\{(x,y):0\leq 2x+y<1,\,x\geq 0,\,y\geq 0\}$ とする．ただし，a は正の実数とする．

(1) $0\leq x\leq a$ において連続な関数 $f(x)$ について，以下の式が成立するように，定数 K の値を定めよ．

$$\iint_D f(2x+y)\;dxdy=K\int_0^a uf(u)\;du$$

(2) 広義積分 $\displaystyle\iint_E \frac{dxdy}{\sqrt{1-2x-y}}$ が収束することを示し，その値を求めよ．

空　欄

[**3**]　n を自然数とする．二項係数 ${}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ を要素とする下三角行列を

$$L(n) = \begin{bmatrix} {}_0\mathrm{C}_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ {}_1\mathrm{C}_0 & {}_1\mathrm{C}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ {}_2\mathrm{C}_0 & {}_2\mathrm{C}_1 & {}_2\mathrm{C}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ {}_3\mathrm{C}_0 & {}_3\mathrm{C}_1 & {}_3\mathrm{C}_2 & {}_3\mathrm{C}_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}_{n-1}\mathrm{C}_0 & {}_{n-1}\mathrm{C}_1 & {}_{n-1}\mathrm{C}_2 & {}_{n-1}\mathrm{C}_3 & \cdots & {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1} \end{bmatrix}$$

とする．また，n 次正方行列 $P(n)$ を $P(n) = L(n)L(n)^\top$ とする．ただし，$L(n)^\top$ は $L(n)$ の転置行列を表し，$0! = 1$ である．以下の問いに答えよ．

(1) $P(3)$ の固有値を全て求めよ．

(2) $i,\ j$ を自然数とする．x に関する恒等式 $(1+x)^i \times (1+x)^j = (1+x)^{i+j}$ を利用して，

$$\sum_{k=0}^{\min(i,j)} {}_i\mathrm{C}_k \times {}_j\mathrm{C}_k = {}_{i+j}\mathrm{C}_i = {}_{i+j}\mathrm{C}_j$$

となることを示せ．ただし，$\min(i,j)$ は $i,\ j$ のうち大きくないほうを表す．

(3) $P(n)$ の (i,j) 成分 $p_{ij}^{(n)}$ が $p_{ij}^{(n)} = {}_{i+j-2}\mathrm{C}_{i-1}$ となることを示せ．

(4) $L(n)$ の逆行列を求めよ．

空　欄

[4]　n 個の個体に対して，データの組み $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ が得られたとし，

$$Q(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{n} \left(y_k - \alpha - \beta x_k\right)^2$$

とおく．

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k, \quad s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2, \quad s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(y_k - \bar{y})^2,$$
$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}), \quad r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

として，以下の問いに答えよ．

(1) α, β の最小 2 乗推定量 $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ を求めよ．

(2) $Q(\alpha, \beta)$ の最小値を r_{xy} および s_y^2 を用いて表せ．

(3) 決定係数 R^2 が r_{xy}^2 となることを示せ．ただし, 決定係数 R^2 は, $R^2 = 1 - \dfrac{Q(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\sum_{k=1}^{n}(y_k - \bar{y})^2}$ で定義される．

空　欄