令和２（２０２０）年度

広島大学一般入試　後期日程

理学部　数学科

数　学

数学Ｉ，数学 II，数学 III，
数学 A，数学 B

令和 2 年 3 月 12 日

自　9 時 00 分

至　11 時 30 分

答案作成上の注意

1. 試験開始の合図があるまでは，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子には，数学 I，数学 II，数学 III，数学 A，数学 B（数列，ベクトル）に関する問題が５問あります。総ページは１３ページで，問題は４ページ以降の偶数ページにあります。
3. 解答用紙は５枚です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
4. 下書き用紙は３枚です。下書き用紙の注意書きもよく読みなさい。
5. 受験番号は，それぞれの解答用紙の所定の欄に必ず記入しなさい。
6. 試験終了後は，解答用紙を左上の番号の順に並べなさい。
7. 配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

空　白

空　白

〔１〕　関数

$$f(x)=\frac{1}{x^2(6x-7)}$$

に対して，$y=f(x)$ のグラフを C とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求め，曲線 C の概形を描け。ただし，C の凹凸を調べる必要はない。

(2) $f(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{c}{6x-7}$ となる定数 a，b，c の値を求めよ。

(3) 曲線 C と直線

$$\ell:\ y=f\left(-\frac{1}{3}\right)$$

の交点をすべて求めよ。

(4) ℓ を (3) で定義した直線とする。曲線 C と直線 ℓ の交点の x 座標のうち，最も大きいものを γ とし，次に大きいものを β とする。$\beta \leqq x \leqq \gamma$ の範囲において，曲線 C と直線 ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ。

空　白

〔 2 〕 (x, y, z) を座標とする座標空間において，3 点

$$\mathrm{O}(0,0,0), \quad \mathrm{A}(1,0,0), \quad \mathrm{B}(1,1,0)$$

を考える。点 B を中心とする半径 2 の球面が平面 $y=1$ と交わってできる円を C とする。また，点 B を中心とする半径 3 の球面が平面 $x=1$ と交わってできる円を D とする。以下の問いに答えよ。

(1) 次の条件を満たす実数 m の値をすべて求めよ。

条件： 平面 $z=m$ と円 C は異なる 2 点 P_1，P_2 で交わり，かつ線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さは 3 である。

(2) $\angle\mathrm{AOP}$ が 45° となる円 C 上の点 P をすべて求めよ。

(3) 直線 PQ が原点 O を通るような円 C 上の点 P と円 D 上の点 Q の組をすべて求めよ。

空 白

〔 3 〕 関数

$$f(x) = x\left(\frac{3}{2} - x\right)e^{-x}$$

を考える。実数 a に対し，

$$g_a(x) = f(x+a)$$

とおく。さらに $y = g_a(x)$ のグラフのうち，不等式 $x \geqq 0$ で表される領域に含まれる部分を C_a とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の増減を調べよ。また，関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

(2) 実数 a を $a \geqq 0$ の範囲で動かすとき，曲線 C_a が通る部分を D とする。D を図示せよ。必要ならば，

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

が成り立つことを，証明なしで用いてよい。

(3) (2) で定めた図形 D のうち，不等式 $y \geqq 0$ で表される領域に含まれる部分の面積を求めよ。

空　白

〔 4 〕 n を自然数とする。3 種類の文字 A，B，C を用いて長さ n の文字列を作ることを考える。このような文字列のうち，以下の条件を満たすものを AB 禁止文字列と呼ぶ。

条件： 文字 A，B がこの順に連続して現れない。

たとえば，長さ 5 の文字列 AACBA は AB 禁止文字列であるが，CABAC は AB 禁止文字列ではない。長さ n の AB 禁止文字列の個数を P_n と書く。たとえば，長さ 1 の文字列はすべて AB 禁止文字列だから $P_1 = 3$ であり，長さ 2 の文字列は AB を除いてすべて AB 禁止文字列だから $P_2 = 8$ である。以下の問いに答えよ。

(1) 長さ n の AB 禁止文字列のうち，末尾が A のものの個数を P_n^{A} とおく。同様に末尾が B，末尾が C であるような長さ n の AB 禁止文字列の個数をそれぞれ P_n^{B}，P_n^{C} とおく。このとき，三つの等式

$$P_{n+1}^{\mathrm{A}} = P_n, \quad P_{n+1}^{\mathrm{C}} = P_n, \quad P_{n+1}^{\mathrm{B}} = P_n^{\mathrm{B}} + P_n^{\mathrm{C}}$$

が成り立つ。理由を説明せよ。

(2) 等式

$$P_{n+2} = 3P_{n+1} - P_n$$

が成り立つことを示せ。

(3) 二次方程式

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

の解を α，β （ただし $\alpha < \beta$）とおく。等式

$$P_{n+2} - \alpha P_{n+1} = \beta(P_{n+1} - \alpha P_n)$$

および

$$P_{n+2} - \beta P_{n+1} = \alpha(P_{n+1} - \beta P_n)$$

が成り立つことを示せ。

(4) 極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n}$$

を調べよ。

空　白

〔5〕 実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。2 以上の整数 n に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{k^3}{n} \right]$$

と定める。たとえば，

$$S_3 = \left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{8}{3}\right] = 2, \quad S_5 = \left[\frac{1}{5}\right] + \left[\frac{8}{5}\right] + \left[\frac{27}{5}\right] + \left[\frac{64}{5}\right] = 18$$

である。以下の問いに答えよ。必要ならば，正の整数 m に対して

$$\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

が成り立つことを，証明なしで用いてよい。

(1) n を 2 以上の整数とし，k を n 未満の正の整数とする。n と k が互いに素であるとき，

$$\left[\frac{k^3}{n}\right] + \left[\frac{(n-k)^3}{n}\right]$$

を n，k についての整式として表せ。

(2) p を素数とするとき，S_p を p を用いて表せ。また，S_{23} を求めよ。

(3) p を素数とするとき，S_{p^2} を p を用いて表せ。また，S_{25} を求めよ。

空　白