解答例

[1]

1. $f(t) = \cosh t$.

2. $p = 2$, $2x + 2y + z = \pm 3$.

3. $a = -\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3}$.

[2]

1. (1) $(0,0)$, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

   (2) $(0,0)$ では極大でも極小でもない.
   $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で極大値 $\frac{1}{2e}$. $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で極小値 $-\frac{1}{2e}$.

   (3) $-\frac{1}{2e} \leq f(x,y) \leq \frac{1}{2e}$.

2. (1) $\iint_D e^{-(x+y)^2}\, dxdy = \frac{1}{2}$

   (2) $\iint_D y^n e^{-(x+y)^2}\, dxdy = \frac{m!}{2(2m+1)}$.

[3]

(1) 固有値は, $\lambda = \pm i\alpha$ である. このとき, $\lambda = i\alpha,\ c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix},\ c_1 \neq 0$. $\lambda = -i\alpha,\ c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix},\ c_2 \neq 0$.

(2) (i) $n = 2m-1$ のとき $A^n = A^{2m-1} = (-1)^{m-1}\alpha^{2m-2}A$.

(ii) $n = 2m$ のとき $A^n = A^{2m} = (-1)^m \alpha^{2m} E$.

(3) $|B| = (1-\alpha^2)^2$

(4) 必要十分条件は, $\alpha \neq \pm 1$. このとき, $B^{-1} = \frac{1}{1-\alpha^2}\begin{bmatrix} A & E \\ E & -A \end{bmatrix}$

[4]

1. 前半 ：95% 信頼区間は, $\left[\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$. 後半 ： 約 7 割の標本数で良い.

2. (1) $a = \frac{1}{2}$

   (2) $\beta = 3$

   (3) 関数 $y = f(x)$ と標準正規分布は共に y 軸対称で, 4 点で交わっている. また, 関数 $y = f(x)$ は $x = 0$ で微分不可能であり, 標準正規分布より尖っている.