【母比率の区間推定】

● 母比率の区間推定　　母集団において，ある事象が起こる確率の信頼区間を推定すること

確率変数 X が二項分布 $B(n\,,\,p)$ に従い， n が十分に大きいとき，X は近似的に正規分布 $N(np\,,\,np(1-p))$ に従う。

ここで，母集団において，ある性質Aをもつ割合（母比率）を p とする。この母集団から抽出されたサイズ n の標本について，この標本における性質Aをもつ割合（標本比率）を $\overline{p}$ とすると， 確率変数 X は性質Aをもつ個数だと考えられるので，$\overline{p}=\dfrac{X}{n}$ となる。

n が十分に大きいとき，

標本比率 $\overline{p}=\dfrac{X}{n}$ は近似的に正規分布 $N\left(p\,,\dfrac{p(1-p)}{n}\right)$ に従う。

（確率変数を $\dfrac{1}{n}$ 倍すると，平均は $\dfrac{1}{n}$ 倍，分散は $\dfrac{1}{n^2}$ 倍される）

これを正規化して， $T=\dfrac{\overline{p}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$ とすると，

T は近似的に標準正規分布 $N(0\,,\,1)$ に従う。

よって， 標準正規分布の95%信頼区間の信頼係数は1.96であるから

$$P\left(\left|\frac{\overline{p}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}\right|\leqq 1.96\right)=0.95$$

つまり，母比率 p の95%信頼区間は,

$$\overline{p}-1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\leqq p\leqq \overline{p}+1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

となる。

ここで，区間の上限，下限の式に p が入っているが，標本のサイズ n が十分に大きいので， p を $\overline{p}$ で代用することができる。しがたって，母比率 p の95%信頼区間は,

$$\overline{p}-1.96\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\leqq p\leqq \overline{p}+1.96\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$$

となる。

例　ある都市の小学生520人を無作為抽出したら，そのうち197人がむし歯を保有していることが分かった。この結果から，この都市の小学生のむし歯の保有率 p の95%信頼区間を求めたい。

（解答例）　　標本比率 $\overline{p}=\dfrac{197}{520}=0.38$ ， $1-\overline{p}=0.62$ 　より，95%信頼区間は,

$$0.38-1.96\sqrt{\frac{0.38\times 0.62}{520}}\leqq p\leqq 0.38+1.96\sqrt{\frac{0.38\times 0.62}{520}}$$

$$\therefore\quad 0.38-0.042\leqq p\leqq 0.38+0.042$$

したがって， $0.33\leqq p\leqq 0.43$

問題１

(1)　100問を二者択一で答えさせる国家試験がある。この試験の合格ラインは60%である。まったく予備知識のない受験生がでたらめに解答したとき，合格率は何%となるか。

(2)　あるテストの問題は10問全て5択問題（選択肢が5つあり，その中の1つが正解）である。このテストを適当に受けて，5問以上正解する確率を求めよ。

問題２

公正なコイン（表裏の出る確率は$\frac{1}{2}$）を10,000回投げて，本当に表，裏の出る確率が等しいのか調べることにした。そこで，このコインを10,000回投げて表裏をチェックした。次の日の結果から確率を求めようとしたところ，表が出た回数が5,100回になった以降の調査用紙が破れていて，それ以後の回数がチェックできなかった。今わかっていることは，このコインを10,000回投げると，少なくとも表が5,100回出るということである。

(1)　このコインが「公正なコインである」として，10,000回投げて表が5,100回以上出る確率を求めよ。

(2)　このコインは「公正なコインである」といえるか。もしいえなければ，どのようなコインであれば「公正なコイン」であるといえるか，論じなさい。