受験番号	M							

広島大学大学院先進理工系科学研究科
量子物質科学プログラム
博士課程前期入学試験問題

専 門 科 目（物理学分野）

2020 年 8 月 27 日　13:30〜16:30

注意事項

（1）以下の用紙が配付されている。

問題用紙（表紙を含む）	5 枚
解答用紙	4 枚
下書用紙	1 枚

（2）問題は全部で４問あり，[1]〜[4]の問題番号および出題科目名を $\boxed{}$ に示してある。

（3）これらすべてについて解答せよ。

（4）解答は問題ごとに指定の用紙を用いること。紙面が不足した場合は裏面を用いてよい。

（5）問題用紙の表紙，解答用紙および下書用紙のすべてに受験番号を記入せよ。

（6）試験終了後，解答用紙を提出すること。問題用紙及び下書用紙は持ち帰ること。

広島大学大学院先進理工系科学研究科（博士課程前期）
量子物質科学プログラム　入学試験問題　【物理学分野】

2020.8.27

試験科目	専門科目

［1］ 力 学

(1) 図1のように x-y 平面内 ($z=0$) に置かれ，中心が原点にある密度一様な質量 M，半径 a の円輪（リング）の z 軸周りの慣性モーメント I_R を求めよ。ただし，円輪の太さは無視できるものとする。

(2) 図2のように x-y 平面内 ($z=0$) に置かれ，中心が原点にある密度一様な質量 M，半径 a の円板の z 軸周りの慣性モーメント I_D を求めよ。ただし，円板の厚みは無視できるものとする。

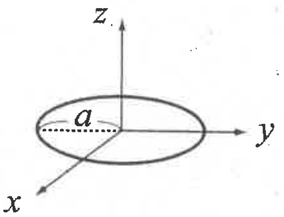


図 1

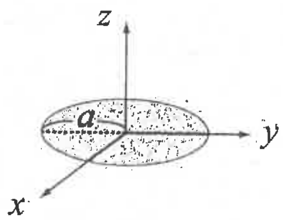


図 2

図3のように，水平面と角度 θ をなす，直線のレール上を図1の円輪が重力の作用を受けて滑らずに転がる。円輪の運動はレールを含む鉛直面内に限るとして以下の問いに答えよ。ただし，重力加速度は g とする。

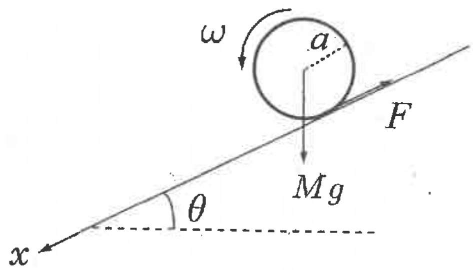


図 3

(3) レールに沿って図3のように x 軸をとるとき，円輪に作用する摩擦力を F としてレールに沿った円輪の重心運動についての運動方程式を記せ。

(4) 円輪の重心の周りの回転運動について運動方程式を記せ。ただし，円輪の回転角速度を ω とする。

(5) レールと円輪の間に滑りがないとき，円輪の回転角速度と重心の速さの関係式を記せ。

(6) 円輪の x 軸方向の加速度と摩擦力 F を求めよ。

(7) 時刻 $t=0$ に，$x=0$ で静止した状態から円輪がレール上を転がり始めたとする。円輪が $x=d\,(>0)$ に到達する時刻 t_d と，その時の円輪の回転エネルギーおよび重心の運動エネルギーを M, g, d, θ のうち必要なものを用いて表せ。

(8) 図2の質量 M，半径 a の円板を同じように $t=0$，$x=0$ で静止した状態から転がした。$x=d$ に到達する時刻を問 (7) で求めた t_d と比較せよ。

(9) 密度一様な質量 $m\,(<M)$，半径 a の円輪を同じように $t=0$，$x=0$ で静止した状態から転がした。$x=d$ に到達する時刻を問 (7) で求めた t_d と比較せよ。

広島大学大学院先進理工系科学研究科（博士課程前期）
量子物質科学プログラム　入学試験問題　【物理学分野】

2020.8.27

試験科目	専門科目

［2］ 電磁気学

真電荷も真電流も存在しない真空中で，電場 $\boldsymbol{E}$ および磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が満たす４つの方程式（マックスウェル方程式）のうちの２つは次のように表せる：

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0,\qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=0$$

ここで，t は時間，c は定数である。以下の問いに答えよ。

(1) 残り２つのマックスウェル方程式を書き下せ。

(2) 真空の誘電率を ε_0，透磁率を μ_0 とすると，定数 c はどのように表せるか。また，その大体の大きさを述べよ。

以下では，電磁場が静的な場合を考える。

(3) マックスウェル方程式を用い，「静電磁場においては，電場と磁場が独立に取り扱える」ことを示せ。

(4) 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が，空間座標 $\boldsymbol{r}$ に依存する或る関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ の勾配として表せることを示せ。

(5) 下図のような半径 a の無限に長い円筒状の穴の内側に，中心軸方向の座標 z に依存しない静的な多重極磁場が発生している。このとき，穴の内側に生じる静磁場を表す関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ は一般に，z を含まない次のような式で与えられる：

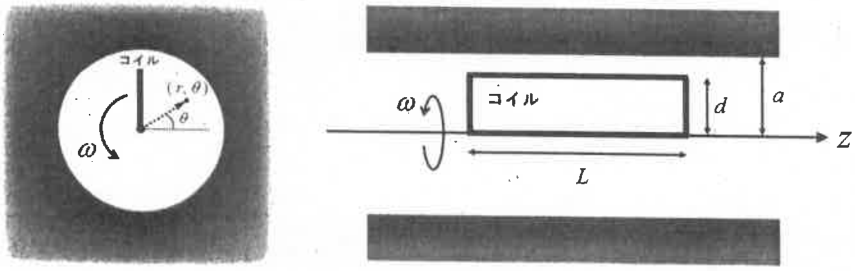
$$\psi(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{a}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^n\sin(n\theta+\varphi_n)\qquad \text{(A)}$$

ここで，(r,θ) は z 軸に直交する平面上の極座標，B_n および φ_n はいずれも定数である。
いま，図のように幅 d，長さ L の長方形をした薄いコイル（巻き数 1）を z 軸に沿って挿入し，一定の角周波数 ω で z 軸の周りに回転させた。$\theta=\omega t$ として，発生する起電力 $V(\theta)$ を計算せよ。導線の太さは無視してよい。

(6) 起電力 $V(\theta)$ を測定すれば，その波形から，上式(A)が含む定数 B_n と φ_n が決定できる。$V(\theta)$ から，定数 B_n および φ_n を求めるための公式を導け。

(7) 関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ の満たすべき方程式を示し，それを解いて上式(A)を導け。必要があれば，以下の円筒座標 (r,θ,z) で表されたラプラシアンを用いよ。

$$\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$



広島大学大学院先進理工系科学研究科（博士課程前期）
量子物質科学プログラム　入学試験問題　【物理学分野】

2020.8.27

試験科目	専門科目

［3］ 量子力学

中心力ポテンシャルに束縛された電子があり，量子数 $l=1$ の軌道角運動量と量子数 $s=\frac{1}{2}$ のスピン角運動量を持つ状態にある。運動エネルギーと中心力ポテンシャルによるハミルトニアン $\mathcal{H}_0$ の固有状態を $|l,m_l;s,m_s\rangle$ で表すことにしよう。m_l と m_s はそれぞれ軌道およびスピン角運動量の z 軸（量子化軸）成分を表す量子数である。$m_l=1,0,-1$ と $m_s=\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$ の組み合わせによる 6 個の状態が固有値 ε_0 で縮退している。全角運動量を $\hat{j}=\hat{l}+\hat{s}$ と定義すると，$\hat{j}^2$, $\hat{j}_z$, $\hat{l}^2$, $\hat{s}^2$ は互いに交換し，同時固有状態 $|j,m_j\rangle$ をもつことができる。ただし，$\hat{l}$ と $\hat{s}$ は独立な演算子であり，それぞれ軌道状態およびスピン状態にのみ作用する。また，

$$\hat{j}^2|j,m_j\rangle=\hbar^2 j(j+1)|j,m_j\rangle,\quad \hat{j}_z|j,m_j\rangle=\hbar m_j|j,m_j\rangle$$

$$\hat{j}_\pm|j,m_j\rangle=\hbar\sqrt{(j\mp m_j)(j\pm m_j+1)}\,|j,m_j\pm 1\rangle\quad(\hat{j}_\pm=\hat{j}_x\pm i\hat{j}_y)\quad ：複号同順$$

が成り立ち，これらは角運動量についての一般関係として，$\hat{l}$ や $\hat{s}$ に対しても同様に成り立つ。

(1) $\hat{j}_-|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle$, $\hat{l}_-|1,1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$, $\hat{s}_-|1,1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$, $\hat{l}^2|1,0;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$, $\hat{s}^2|1,0;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$ を計算せよ。

(2) $|1,1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ は j と m_j がいずれも最大値 $l+s$ をとる状態 $|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle$ のことであり，$|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle=|1,1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ と表せる。では，$|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle$ はどう表されるか。問 (1) の結果を用いて，$|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle$ を $|1,m_l;\frac{1}{2},m_s\rangle$ の線形結合で表せ。

(3) $m_j=m_l+m_s=\frac{1}{2}$ を満たし，かつ $|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle$ と直交する状態も作ることができる。これは $j=\frac{1}{2}$ の状態 $|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ である。$|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ を $|1,m_l;\frac{1}{2},m_s\rangle$ の線形結合で表せ。

以下，スピン軌道相互作用 $\zeta\hat{l}\cdot\hat{s}$（ζ は正の定数）を考慮し，次のハミルトニアンについて考える。

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_0+\zeta\hat{l}\cdot\hat{s}$$

(4) $j=\frac{1}{2}$ の 2 状態 $|\frac{1}{2},m_j\rangle$ $(m_j=\pm\frac{1}{2})$，および $j=\frac{3}{2}$ の 4 状態 $|\frac{3}{2},m_j\rangle$ $(m_j=\pm\frac{3}{2},\pm\frac{1}{2})$ は $\zeta\hat{l}\cdot\hat{s}$ の固有関数であることを示し，それぞれの状態に対する $\zeta\hat{l}\cdot\hat{s}$ の固有値 $\Delta_{1/2}$ および $\Delta_{3/2}$ を求めよ。$\hat{j}^2=\hat{l}^2+\hat{s}^2+2\hat{l}\cdot\hat{s}$ の関係があることを使うとよい。

(5) 外部から z 軸方向に磁場をかけ，無磁場のハミルトニアン $\mathcal{H}=\mathcal{H}_0+\zeta\hat{l}\cdot\hat{s}$ に，係数を B として

$$\mathcal{H}'=B\hbar(\hat{l}_z+2\hat{s}_z)$$

が加えられたとする。ただし，$\zeta\gg B$ であり，磁場効果は 1 次摂動の範囲で考えてよい。図 1 はそのときのエネルギー準位の分裂の様子を表す。エネルギー E_1, E_2, E_3 を求めよ。

(6) ナトリウムからのオレンジ色の発光を分光すると，図 2(a) のように波長 589.0 nm と波長 589.6 nm の 2 本のスペクトル線が観測される。この光は $l=1$ の $3p$ 軌道に励起された電子が $l=0$ の $3s$ 軌道に遷移するときの発光であり，2 本の線はスピン軌道相互作用によって分裂した $3p$ 軌道のエネルギー準位を反映している。ここで，$3p$ 軌道の状態 $|1,m_l;\frac{1}{2},m_s\rangle$ から $3s$ 軌道の状態 $|0,m_l';\frac{1}{2},m_s'\rangle$ への遷移は，(ア) $m_l'=m_l$ または $m_l\pm1$（軌道に関する条件），(イ) $m_s'=m_s$（スピンに関する条件）の 2 条件を満たす状態間で起こる。磁場をかけると，2 本の線はどのように変化するか。図 2(a)–(e) の中から正しいものを選び，その理由も記せ。

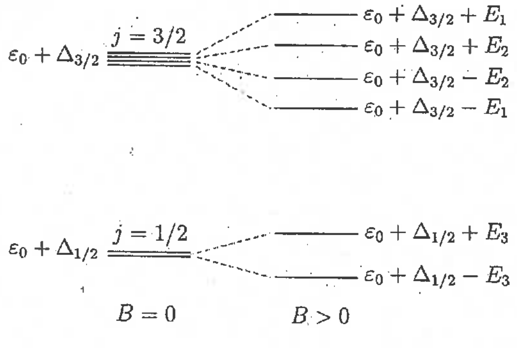


図 1

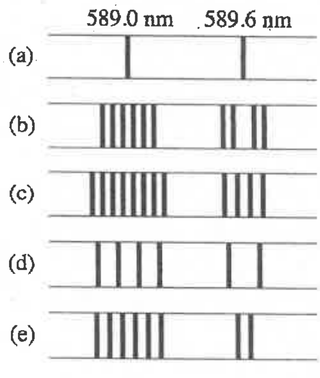


図 2

試験科目	専門科目

［４］ 熱統計力学

相互作用のないスピン 1/2 の電子が，１辺の長さLの２次元のx-y面に閉じ込められており，系は絶対温度 T の熱平衡状態にある。電子の波動関数は平面波で表され，周期境界条件により，電子の運動量は $\boldsymbol{p}=\frac{2\pi\hbar}{L}(n_x,n_y)$という値のみが許される（$n_x$と$n_y$は任意の整数)。また，電子の質量を m として，エネルギーは $E_p=\frac{p^2}{2m}$ で与えられる。k_{B} はボルツマン定数である。

(1) $E_p \leq E$ を満たす１粒子状態の総数を，エネルギーEの関数として求めよ。

(2) １粒子状態の状態密度を求めよ。

(3) 電子の面密度を σ とするとき，フェルミ運動量の大きさとフェルミエネルギーを求めよ。

磁束密度 $\boldsymbol{B}$ (大きさは B) の一様な弱い磁場をx-y面と垂直な方向にかけると，速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する電子（電荷: $-e$）はローレンツ力 $-e(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ を受けてx-y面内で円運動する。電子の質量は m である。

(4) 電子の円運動の角振動数 ω_1 を求めよ。

(5) この円運動は，量子力学的な調和振動と等価であり，電子のエネルギー準位は

$$E_\ell=\hbar\omega_1\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\quad(\ell=0,1,2,\cdots)$$

で与えられる。運動量平面における量子数 $\ell+1$ と ℓ の準位で囲まれる面積に含まれる状態数から，量子数 ℓ の準位の縮重度を求めることができる。量子数 ℓ の準位の縮重度を求めよ。

(6) １個の電子に関する分配関数を求めよ。ただし，この系は高温にあり，ボルツマン統計にしたがうとする。必要があれば，以下の等比級数の和の極限に関する式を用いよ。

$$|r|<1\text{のとき，}\sum_{n=0}^{\infty}r^n=\frac{1}{1-r}$$

(7) N個の電子に対する分配関数から磁化を求めよ。