

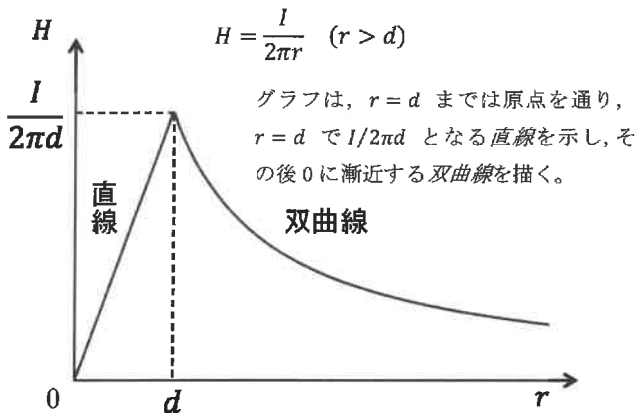
問1 力学

|  |  |
|--|--|
| <p>(1)</p> $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \text{ より, } \vec{F} = \begin{pmatrix} qv_y B \\ -qv_x B \\ 0 \end{pmatrix}$   | <p>(4)</p> <p>(3)の結果を時間で積分する。 <math>X_0, Y_0</math> を任意定数として</p> $x = -\frac{mv_0}{qB} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + X_0$ $y = \frac{mv_0}{qB} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + Y_0$  |
| <p>(2)</p> <p>直交座標系における運動方程式は,</p> $m\ddot{x} = qv_y B$ $m\ddot{y} = -qv_x B$ $m\ddot{z} = 0$  | <p>初期条件を用いると,</p> $x = -\frac{mv_0}{qB} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{mv_0}{qB}$ $y = \frac{mv_0}{qB} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right)$ $z = 0$   |
| <p>(3)</p> <p><math>z</math> 方向の運動に関しては, 力がゼロであることから <math>t=0</math> の初期値を考慮すると,</p> $v_z = 0$ <p><math>xy</math> 面内の運動に関しては, <math>\dot{x} = v_x, \dot{y} = v_y</math> を用いて</p> $m\dot{v}_x = qv_y B$ $m\dot{v}_y = -qv_x B$ <p>よって, この微分方程式の一般解は, 次のようになる。</p> $v_x = A \cdot \cos\left(-\frac{qB}{m}t + \phi\right)$ $v_y = A \cdot \sin\left(-\frac{qB}{m}t + \phi\right)$ <p>ただし, <math>A, \phi</math> は, 任意定数。初期条件を用いると</p> $v_x = v_0 \sin\left(\frac{qB}{m}t\right)$ $v_y = v_0 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right)$ $v_z = 0$ <p>となる。</p> | <p>(5)</p> $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} + qE\vec{e}_z \text{ より, } \vec{F} = \begin{pmatrix} qv_y B + qE \\ -qv_x B \\ 0 \end{pmatrix}$ <p>運動方程式は, <math>m\dot{v}_x = qv_y B + qE</math></p> $m\dot{v}_y = -qv_x B$ $m\dot{v}_z = 0$ <p>(6)</p> <p>運動方程式の第一式を変形して, <math>m\dot{v}_x = q\left(v_y + \frac{E}{B}\right)B</math> とし, <math>v_y + \frac{E}{B} = V_y</math> とおけば, 運動方程式は次のようになる。</p> $m\dot{v}_x = qV_y B$ $m\dot{V}_y = -qv_x B$ <p>この一般解は,</p> $v_x = A \cdot \cos\left(-\frac{qB}{m}t + \phi\right)$ $V_y = A \cdot \sin\left(-\frac{qB}{m}t + \phi\right)$ <p>(ここで, <math>A, \phi</math> は任意定数) 初期条件を使うと,</p> $v_x = \left(v_0 + \frac{E}{B}\right) \sin\left(\frac{qB}{m}t\right)$ $V_y = \left(v_0 + \frac{E}{B}\right) \cos\left(\frac{qB}{m}t\right)$ <p>である。 <math>V_y</math> を <math>v_y</math> で表し上を積分すると,</p> $x = \frac{m}{qB} \left(v_0 + \frac{E}{B}\right) \left(-\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + 1\right)$ $y = -\frac{E}{B}t + \frac{m}{qB} \left(v_0 + \frac{E}{B}\right) \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \quad z = 0$ |

問2 電磁気学

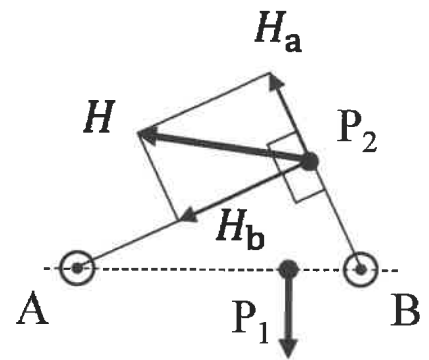
(1)

導線円柱の中心から半径  $r$  で描く導線に垂直な円を描き、この円を閉曲線とするアンペールの法則を考える。  
 円柱の内部 ( $r \leq d$ ) では、電流が一樣に流れていることから円柱内に流れる電流密度  $i$  は  $i = \frac{I}{\pi d^2}$   
 $r \leq d$  の範囲内で流れる電流  $I(r)$  は、 $I(r) = i \cdot \pi r^2 = I \frac{r^2}{d^2}$   
 したがって  $I(r) = I \frac{r^2}{d^2} = H \cdot 2\pi r$  よって  $H = \frac{Ir}{2\pi d^2}$  ( $r \leq d$ )  
 一方、円柱の外部 ( $r > d$ ) では、閉曲線 (半径  $r$  の円) 内に流れる電流は絶えず  $I$  であるため、 $I = H \cdot 2\pi r$



(3)

(点  $P_1$ ) 導線 a と b によって生じる点  $P_1$  での磁界の強さ  $H_a$ 、 $H_b$  はアンペールの法則により  $I_a = H_a \cdot 2\pi r_a$ 、 $I_b = H_b \cdot 2\pi r_b$   
 導線 a と b それぞれによって生じる磁界の向きは正反対で、 $r_a > r_b$  かつ  $I_a < I_b$  より  $H_a < H_b$  よって点  $P_1$  での合成磁界  $H$  は図の下方向で  $H = H_b - H_a = \frac{I_b}{2\pi r_b} - \frac{I_a}{2\pi r_a}$  (点  $P_1$ )  
 (点  $P_2$ ) 点 A,  $P_2$ , B が形作る三角形は、問題の定義により点  $P_2$  で  $90^\circ$  となる直角三角形である。したがって右図のように導線 a と b から点  $P_2$  で生じる磁界  $H_a$  と  $H_b$  が  $AP_2$  と  $P_2B$  となす角も直角となるため、それらの合成磁界は、  
 $H = \sqrt{H_a^2 + H_b^2} = \sqrt{\left(\frac{I_a}{2\pi r_a}\right)^2 + \left(\frac{I_b}{2\pi r_b}\right)^2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{I_a^2}{r_a^2} + \frac{I_b^2}{r_b^2}}$  (点  $P_2$ )



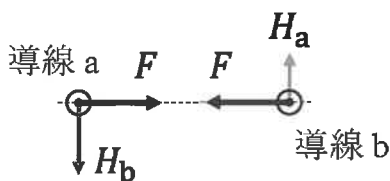
(2)

導線 a が導線 b に作る磁界の強さ  $H_a$  は  

$$H_a = \frac{I_a}{2\pi r_0}$$
 で電流の向きおよび導線 a と b を結ぶ線と垂直である。  
 したがって導線 b が単位長さあたりに受ける力  $F$  は、

$$F = \mu_0 H_a \cdot I_b = \frac{\mu_0 I_a I_b}{2\pi r_0}$$

で、その向きは互いの方向 (引力, 点線の上) である。  
 逆の場合 (導線 a が受ける力  $F$ ) も同様。



(4)

(ア) 電流の向きが逆の場合は、導線 a と b が作る磁界  $H_a$  と  $H_b$  は下図のように描くことができる。 $\angle AP_3B$  を  $\alpha$  とすると、辺  $AP_3$  ( $r_a$  の線) と  $H_a$  のベクトルとがなす角、および辺  $P_3B$  ( $r_b$  の線) と  $H_b$  のベクトルとがなす角はともに直角であることから、 $H_a$  と  $H_b$ 、 $H$  のベクトルが形成するグレーの三角形にも角度  $\alpha$  が存在し、以下の余弦定理が成り立つ。  
 $H^2 = H_a^2 + H_b^2 - 2H_a H_b \cos \alpha$  よって

$$H = \sqrt{\left(\frac{I}{2\pi r_a}\right)^2 + \left(\frac{I}{2\pi r_b}\right)^2 - 2 \frac{I}{2\pi r_a} \frac{I}{2\pi r_b} \cos \alpha}$$

$$= \frac{I}{2\pi r_a r_b} \sqrt{r_a^2 + r_b^2 - 2r_a r_b \cos \alpha}$$

磁界の向きは図のように導線 a と b から遠ざかる方向になる。

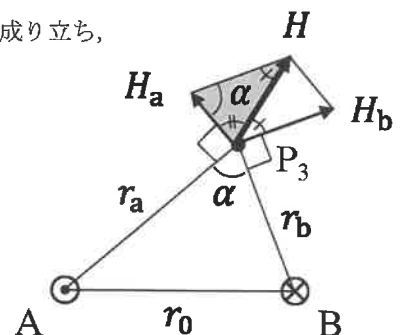
(イ) 三角形  $AP_3B$  でも余弦定理が成り立ち、

$$r_0^2 = r_a^2 + r_b^2 - 2r_a r_b \cos \alpha$$

したがって合成磁界  $H$  の強さは、

$$H = \frac{I}{2\pi r_a r_b} \sqrt{r_0^2} = \frac{I r_0}{2\pi r_a r_b}$$

となる。



問3 熱力学

(1)

この過程で理想気体がピストンにした仕事は

$$W_a = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT_H}{V} dV = RT_H \log \left( \frac{V_2}{V_1} \right)$$

等温過程のため、内部エネルギーに変化はない。したがって熱力学第一の法則により、

$$Q_a = W_a = RT_H \log \left( \frac{V_2}{V_1} \right)$$

(4)

$$W_d = \int_{V_4}^{V_1} p dV = - \int_{T_L}^{T_H} dU = -C_V \int_{T_H}^{T_L} dT = -C_V(T_H - T_L)$$

断熱過程のため、熱量の出入りはないため  $W_d$  が内部エネルギーの変化に等しい。

したがって、内部エネルギーは  $C_V(T_H - T_L)$  だけ増加する。

(2)

この過程で理想気体がピストンにした仕事は

$$W_b = \int_{V_2}^{V_3} p dV = - \int_{T_H}^{T_L} dU = -C_V \int_{T_H}^{T_L} dT = C_V(T_H - T_L)$$

断熱過程のため、熱量の出入りはないため  $W_b$  が内部エネルギーの変化に等しい。

したがって、内部エネルギーは  $C_V(T_H - T_L)$  だけ減少する。

(5)

$$W_T = W_a + W_c = RT_H \log \left( \frac{V_2}{V_1} \right) - RT_L \log \left( \frac{V_3}{V_4} \right)$$

(3)

この過程で理想気体がピストンにした仕事は

$$W_c = \int_{V_3}^{V_4} p dV = \int_{V_3}^{V_4} \frac{RT_L}{V} dV = RT_L \log \left( \frac{V_4}{V_3} \right)$$

等温過程のため、内部エネルギーに変化はない。したがって熱力学第一の法則により、

$$Q_c = -W_c = RT_L \log \left( \frac{V_3}{V_4} \right)$$

(6)

$$\eta = 1 - \frac{Q_c}{Q_a} = 1 - \frac{RT_L \log \left( \frac{V_3}{V_4} \right)}{RT_H \log \left( \frac{V_2}{V_1} \right)}$$

断熱過程におけるポアッソンの法則から

$$T_H V_2^{\gamma-1} = T_L V_3^{\gamma-1}$$

$$T_L V_4^{\gamma-1} = T_H V_1^{\gamma-1}$$

よって

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \quad \text{よって} \quad \eta = 1 - \frac{T_L}{T_H}$$

問4 数学

(1) (ア)

$$\begin{aligned} \text{grad } r &= \frac{\partial r}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial r}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial r}{\partial z} \vec{k} \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \\ &= \frac{1}{r} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{\vec{r}}{r} \end{aligned}$$

(1) (イ)

$$\begin{aligned} \text{div } \frac{\vec{r}}{r^n} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) r^{-n} \vec{r} = -nr^{-n} + 3r^{-n} \\ &= \frac{3-n}{r^n} \end{aligned}$$

(2) (ア)

$$\tan y \, dy = \tan x \, dx$$

$$\frac{\sin y \, dy}{\cos y} = \frac{\sin x \, dx}{\cos x}$$

$$\sin y \, dy = -d(\cos y), \quad \sin x \, dx = -d(\cos x)$$

より,

$$\frac{d(\cos y)}{\cos y} = \frac{d(\cos x)}{\cos x} \quad \left( -\frac{d(\cos y)}{\cos y} = -\frac{d(\cos x)}{\cos x} \right)$$

$$\log \cos y = \log \cos x + c'$$

$$\frac{\cos y}{\cos x} = 10^{c'} = c$$

$$\therefore \cos y = c \cos x$$

(2) (イ)

$$y = e^{ax}$$

とおいて代入すると,

$$a^2 e^{ax} - 8a e^{ax} + 15 e^{ax} = 0$$

$$(a^2 - 8a + 15) e^{ax} = 0$$

$$a^2 - 8a + 15 = 0$$

$$a = 3, 5$$

$$\therefore y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{5x}$$

(3)

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)) \, dx$$

もし,  $m+n \neq 0$  かつ  $m-n \neq 0$  のとき,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{\sin(m+n)x}{m+n} - \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

もし,  $m+n \neq 0$  かつ  $m-n=0$  のとき,

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos((m+n)x) + 1) \, dx = \frac{1}{2} [x]_0^{2\pi} = \pi$$

もし,  $m+n=0$  かつ  $m-n \neq 0$  のとき,

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos((m-n)x)) \, dx = \frac{1}{2} [x]_0^{2\pi} = \pi$$

もし,  $m+n=0$  かつ  $m-n=0$  のとき,

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 2 \, dx = [x]_0^{2\pi} = 2\pi$$

(4) (ア)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^5 = -4 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

途中の導出過程も示されていること

(4) (イ)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = (\sqrt{2})^n \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$$

途中の導出過程も示されていること