

令和3（2021）年度
広島大学光り輝き入試 総合型選抜
理学部 数学科

筆記試験 問題

令和2年11月24日
自 13時00分
至 15時30分

答案作成上の注意

1. 試験開始の合図があるまでは、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子の総ページは6ページです(表紙1ページを含む)。
3. 解答用紙は5枚、下書き用紙は1枚です。解答は、すべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄(表面)に記入しなさい。もし解答欄が足りない場合には解答用紙の裏面を使用してもよい。
4. 受験番号は、すべての解答用紙と下書き用紙の所定の場所に、必ず記入しなさい。
5. 配付した解答用紙と下書き用紙は、持ち出してはいけません。
6. 試験終了後、問題冊子は持ち帰って下さい。
7. 解答用紙の注意事項もよく読みなさい。(解答用紙に注意事項の記載がある場合)

[1] u を実数として、 O を原点とする座標空間内の3点

$$A(1, 1, 1), \quad B(1, -1, 1), \quad P(0, 2u, u + 1)$$

を考える。 P を通り平面 OAB に垂直な直線と平面 OAB との交点を H とする。

以下の問いに答えよ。

(1) H の座標を u を用いて表せ。

(2) H が三角形 OAB の内部または周上にあるような u の範囲を求めよ。

(3) u が (2) の範囲を動くとき、 OH の最大値および最小値を求めよ。

[2] 次のような手順で座標平面上の点の列を生成する。

(i) 点 (x_1, y_1) を $x_1 + y_1 \neq -4$ となるようにとる。

(ii) 自然数 n に対し、点 (x_n, y_n) が定まったとき、

$x_n + y_n \neq -4$ なら、 $(x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(\frac{4x_n + y_n + 1}{x_n + y_n + 4}, \frac{x_n + 4y_n + 1}{x_n + y_n + 4} \right)$ と定める。

$x_n + y_n = -4$ なら、そこで点の列の生成を停止する（その場合は生成された点の個数は有限個になる）。

以下の問いに答えよ。

(1) $x_n + y_n = k$ (ただし $k \neq -4$) が成り立つとき、 $x_{n+1} + y_{n+1} = \frac{5k+2}{k+4}$

であることを示せ。

(2) $n = 3$ で点の列の生成が停止するような (x_1, y_1) の例を一つ挙げよ。

(3) 数列 $\{x_n - y_n\}$ が等比数列になるような $x_1 + y_1$ の値を求めよ。

(4) $(x_1, y_1) = (2, 0)$ であるとき、 (x_n, y_n) を n を用いて表せ。

[3] 互いに直交する3辺の長さの和が L で、表面積が 2 であるような直方体を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) この直方体の互いに直交する3辺の長さを α, β, γ 、体積を V とするとき、 α, β, γ は3次方程式 $x^3 - Lx^2 + x - V = 0$ の3つの解であることを示せ。
- (2) $L = 2$ のとき、この直方体のとりうる体積の最大値、および最大値をとるときの互いに直交する3辺の長さをそれぞれ求めよ。
- (3) 互いに直交する3辺の長さの和が L で表面積が 2 であるような直方体が存在するような L の範囲を求めよ。

[4] 以下の問いに答えよ。

- (1) 座標空間内に 2 点 $A(4, 0, 0)$, $B(-4, 0, 0)$ がある。座標空間内の点 P についての不等式 $PA + PB \leq 10$ が表す立体 M の体積を求めよ。
- (2) 空間の中に 3 辺の長さが 3, 4, 5 であるような三角形 T がある。ただし、三角形 T には内部の点も含めるものとする。ここで、空間内の点 P に関する次の性質を考える。

P を中心とする半径 1 の球と三角形 T が共通部分をもつ。

この性質を満たす点 P 全体がなす立体 N の体積を求めよ。

[5] 4つの野球チーム A, B, C, D がある。以下の表は、これらのチームが対戦したとき、チーム X がチーム Y に勝つ確率を表している。ただし、 p は $\frac{1}{2} < p < 1$ を満たす実数とする。

X \ Y	A	B	C	D
A		p	p	p
B	$1-p$		p	p
C	$1-p$	$1-p$		p
D	$1-p$	$1-p$	$1-p$	

例えば チーム A とチーム B が対戦したとき、チーム A が勝つ確率は p であり、チーム B が勝つ確率は $1-p$ である。

次のような手順のトーナメント方式で試合を行う。

くじ引き: 箱の中に 1, 2 の数字が書かれた紙が 2 枚ずつ入っており、各チームが 1 枚ずつ引く。

1 回戦: くじ引きで同じ数字を引いたチーム同士が対戦する。勝った方が決勝戦に進む。

決勝戦: 1 回戦の各試合で勝ったチーム同士が対戦する。勝った方を優勝、負けた方を準優勝とする。

以下の問いに答えよ。

- (1) A, B, C, D の各チームが優勝する確率をそれぞれ p を用いて表せ。
- (2) チーム B が優勝したとき、A, C, D の各チームが準優勝となる条件付き確率をそれぞれ p を用いて表せ。