

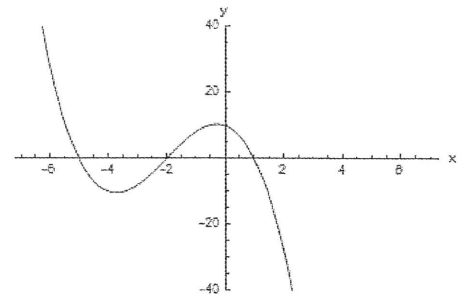
解答例

[1]

問1 $f(x)$ の概略は右図のようになる。

(1) $f(x)$ を因数分解すると、 $f(x) = -(x-1)(x+2)(x+5) = 0$
 $x = 1, -2, -5$

よって、求める値は、 $(+1)^3 + (-2)^3 + (-5)^3 = -132$



(2) $f'(x) = -3x^2 - 12x - 3 = 0$

$$x = -2 \pm \sqrt{3}$$

$$f(-2 + \sqrt{3}) = 6\sqrt{3} \quad f(-2 - \sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$$

よって、 $x = -2 + \sqrt{3}$ で極大値 $6\sqrt{3}$ 、 $x = -2 - \sqrt{3}$ で極小値 $-6\sqrt{3}$

(3) $y = f(x)$ と直線 $y = 0$ で囲まれた領域は二つ。

$$\int_{-2}^1 (f(x) - 0) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 10x \right]_{-2}^1 = \frac{81}{4} \quad \text{と} \quad \int_{-5}^{-2} (0 - f(x)) dx = \frac{81}{4}$$

よって、囲まれた領域の面積は、 $\frac{81}{4} + \frac{81}{4} = \frac{81}{2}$

問2

(1) 関数を x で微分すると、

$$\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{2x^2}{3}} - \frac{4}{3}x \times x^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{2x^2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{2x^2}{3}}} = \frac{2x^{-\frac{1}{3}} - 4x \times x^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{2 - 4x^2}{3x}$$

(2) $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$ より、 $\int (\sin^4 x - \cos^4 x) dx$ は、

$$\int \left\{ \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 - \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \right\} dx = \frac{1}{4} \int -4 \cos 2x dx = -\frac{\sin 2x}{2} + C$$

問3

(1) 円C1の方程式は、 $x^2 + (y-6)^2 = 9$

接点を (p, q) とし、接線が $(0, 0)$ をとる場合は $-6(q-6) = 9$ となり、 $q = \frac{9}{2}$

接点を円の方程式に代入すると $p^2 + (\frac{9}{2} - 6)^2 = 9$ となり、 $p = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$(0,0)$ と接点 $(\pm \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2})$ をとる直線なので、接線の式は $y = \pm\sqrt{3}x$

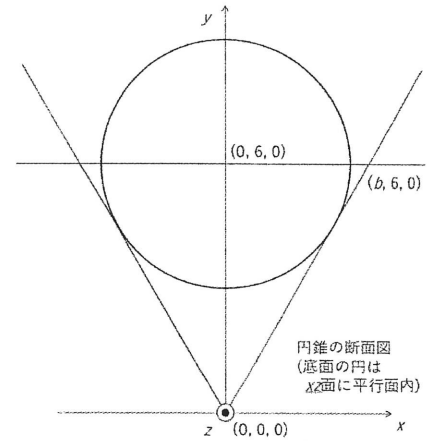
(2) xy 平面での円錐の断面図は右図のようになる。

底面の円の半径 r_2 は右図の b に等しいので、(1)で求めた接線の式の y に6を代入すると、

$$r_2 = b = 2\sqrt{3}$$

母線の長さ L は、 $L = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 6^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

よって、円錐の表面積は、 $\pi r_2^2 + \pi L r_2 = 12\pi + 24\pi = 36\pi$



[2]

問 1 超伝導状態では直流電気抵抗がゼロ、もしくはとてもゼロに近い値であり、超伝導リング内では1年を越えても、しまいには実験者が実験にうんざりするまで、電流の減衰がない永久電流が観測される。

問 2 弱い磁場中では、バルクの超伝導体は内部の磁束密度（磁気誘導）がゼロの完全反磁性体としてふるまうことは実験的事実である。試料が磁場中にあり、その後、超伝導転移温度以下に冷やされたとき、はじめは試料中にあった磁束は試料から排除される。これはマイスナー効果と呼ばれる。

問 3 For the improvement of electrical efficiency, superconducting wires can be applied to reduce an energy loss and waste heat due to the Joule heat at the electric power transmission and electricity storage because the electric resistivity is zero in the superconducting state.

解答例:

(1)

$$v_0 = \sqrt{v^2 - 2gh}$$

(2)

$$x_n = \frac{1}{2}g \sin \theta t_n^2$$

である。よって、比例定数

$$\frac{1}{2}g \sin \theta$$

(ただし、符号がマイナスでも可)

(3)

y成分は、初速 v_0 で点 A_0 に入射され、反発係数 e の定義から、

$$e = -\frac{v_1}{-v_0} = \frac{v_1}{v_0}$$

であるため、

$$v_1 = ev_0$$

である。

一方、重力加速度の影響から $-g \cos \theta$ の加速度を受けるため、衝突から最高到達点までにかかる時間は、

$$ev_0 - g \cos \theta t = 0$$

$$t = \frac{ev_0}{g \cos \theta}$$

また、最高到達点から次に斜面に到達するまでの時間は、この2倍になり、(1)の解から

$$t_1 = \frac{2e}{g \cos \theta} \sqrt{v^2 - 2gh}$$

(4)

時刻 t_n は、質点が衝突地点 A_n にいる時刻を表し、時刻 t_{n+1} は、質点が衝突地点 A_{n+1} 、つまり、 $t_{n+1} - t_n$ は衝突時間の間隔を表す。もし、衝突地点 A_n で衝突後のy方向の速さを v_n とすると、y軸も $-g \cos \theta$ の加速度がかかった等加速度運動であるため、

$$t_{n+1} - t_n = \frac{2v_n}{g \cos \theta}$$

となり、 $t_{n+2} - t_{n+1}$ は衝突地点 A_{n+1} の衝突後のy方向の速さを v_{n+1} とすると、同様にして、

$$t_{n+2} - t_{n+1} = \frac{2v_{n+1}}{g \cos \theta}$$

よって、 $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ は反発係数の定義になっていることに注意すると

$$\frac{t_{n+2} - t_{n+1}}{t_{n+1} - t_n} = \frac{v_{n+1}}{v_n} = e$$

(5)

(3)の結果から

$$t_1 = \frac{2e}{g \cos \theta} \sqrt{v^2 - 2gh}$$

である。また、これと(4)の結果を用いると、

$$t_\infty = t_1 + et_1 + e^2t_1 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} t_1 e^{n-1} = \frac{t_1}{1-e} = \frac{2e}{g(1-e) \cos \theta} \sqrt{v^2 - 2gh}$$

(6)

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgh$$

[4] 解答例

問 1.

(1) O: (b)、C: (b)、D: (b)、E: (a)、F: (a)

(2) 原点 O での電場は設問(2)と同様に

$$E_o = k \cdot 2 \frac{Q}{d^2}$$

$$E_c = \frac{1}{2} k \frac{Q}{(2d)^2} + \frac{1}{2} k \frac{Q}{(2d)^2} = k \cdot \frac{1}{4} \frac{Q}{d^2}$$

$$\frac{E_c}{E_o} = \frac{1}{8}$$

問 2.

(1) O: (d)、C: (d)、D: (d)、E: (c)、F: (c)

(2) 無限に長い直線電流の作る磁場は電流の向きに進む右ねじの回転方向に生成される。その強さは電流値に比例し観測点までの距離に反比例する。

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

原点 O での磁場は 2 つの電流による磁場が下図のように重ね合わされることから、

$$H_o = \frac{Q}{2\pi d} + \frac{Q}{2\pi d} = \frac{Q}{\pi d}$$

$$H_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{2\pi 2d} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{2\pi 2d} = \frac{Q}{4\pi d}$$

以上の結果により

$$\frac{H_c}{H_o} = \frac{1}{4}$$

(3) 下図のような磁場の重ね合わせとなることから

$$\begin{aligned} H_p &= \frac{I}{2\pi\sqrt{d^2+y^2}} \cos\alpha + \frac{I}{2\pi\sqrt{d^2+y^2}} \cos\alpha \\ &= \frac{I}{2\pi\sqrt{d^2+y^2}} \frac{d}{\sqrt{d^2+y^2}} + \frac{I}{2\pi\sqrt{d^2+y^2}} \frac{d}{\sqrt{d^2+y^2}} = \frac{I}{\pi} \frac{d}{d^2+y^2} \end{aligned}$$

設問(2)の結果も用いれば

$$\frac{H_p}{H_o} = \frac{d^2}{d^2+y^2}$$

(4) (c)

y 軸上の磁場は y 軸の負の向きである。磁場の強さは原点で最大値を取り無限遠でゼロとなる座標 y の偶関数である。コイルが移動することでコイルを貫く磁束が変化し誘導起電力が生じる。レンツの法則により、貫通磁束の変化を妨げる向きに誘導電流が流れるように起電力が発生する。コイルが原点に近づくにつれ y 軸負の向きの磁場が強まることから、これを打ち消すように、JからKに向かって電流が流れるように起電力が発生する。すなわち y 軸の負側ではJを基準としてJとKの間に負の電位差が生成される。起電力は無限遠ではゼロとなり、また、磁場が極大となる原点でもゼロとなる。 y 軸の正側ではコイルが原点から離れるにつれ磁場が弱まることから、負側と逆のことが起きる。よって(c)が正しい。