

広島大学大学院先進理工系科学研究科

量子物質科学プログラム

博士課程前期 入学試験問題

基礎科目

2021年1月28日 9:00～10:30

注意事項

(1) 以下の6枚の用紙が配付されている。

問題用紙 (表紙を含む) 2枚

解答用紙 3枚

下書用紙 1枚

(2) 問題は全部で3問あり, [1], [2], [3] の番号で示してある。

(3) 問題ごとに一枚ずつ別々の解答用紙を用いよ。それぞれの解答用紙の左肩に問題番号を記入すること。紙面が不足した場合は裏面を用いてよい。

(4) 解答用紙に受験番号を記入せよ。

(5) 試験終了後, 解答用紙を提出すること。問題用紙及び下書用紙は持ち帰ること。

試験科目	基礎科目
------	------

1 $y = y(x)$ に関する微分方程式 $y'' - 5y' + 6y = 0$ について、

- (a) 線形独立な基本解を全て求めよ。
- (b) 一般解を示せ。
- (c) 初期条件 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ を満たす解を求めよ。

(2) $y'' - 5y' + 6y = e^x$ の場合について、

- (a) 特解 $y = y_0(x)$ を求めよ。
- (b) 一般解を示せ。

[2] 次の問に答えよ。

(1) 次の $n \times n$ 行列の行列式を求めよ。ただし、この行列の非対角成分は全て1である。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ とする。

- (a) 行列 A の固有値、および規格化された固有ベクトルをすべて求めよ。
- (b) 行列 A を対角化する実直交行列 V を求めよ。
- (c) (a)および(b)の結果を用いて、二次形式

$$Q = x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz = [x, y, z]A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

を標準形にせよ。

[3] ベクトル場 $A(\mathbf{r}) = (-y, x, 0)$ について以下の問に答えよ。ここで $\mathbf{r} = (x, y, z)$ である。

- (1) 以下に示す8点において、 A の大きさと方向を図示せよ。
 $(\sqrt{2}, 0, 0), (1, 1, 0), (0, \sqrt{2}, 0), (-1, 1, 0), (-\sqrt{2}, 0, 0), (-1, -1, 0), (0, -\sqrt{2}, 0), (1, -1, 0)$.
- (2) $\nabla \times A$ を求めよ。
- (3) 原点を中心とする xy 面上の半径 a の円によって囲まれる閉領域において、 $\nabla \times A$ の z 成分を面積分し、その値を求めよ。
- (4) 位置ベクトル $\mathbf{l} = (a \cos \theta, a \sin \theta, 0)$ を導入する。 θ は実数のパラメータである。以下に示す積分の値を求めよ。 θ に関する定積分を実行すること。

$$\int_0^{2\pi} A(\mathbf{l}) \cdot \frac{d\mathbf{l}}{a d\theta} d\theta.$$

- (5) (3)と(4)の積分はベクトル解析における周知の定理によって関連付けられる。その定理の内容について知ることを述べよ。