令和３（２０２１）年度

広島大学一般選抜　後期日程

理学部　数学科

数　学

数学 I，数学 II，数学 III，
数学 A，数学 B

令和 3 年 3 月 12 日

自　9 時 00 分

至　11 時 30 分

答案作成上の注意

1. 試験開始の合図があるまでは，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子には，数学 I，数学 II，数学 III，数学 A，数学 B（数列，ベクトル）に関する問題が **5 問** あります。総ページは **１３ ページ**で，問題は４ページ以降の偶数ページにあります。
3. 解答用紙は**５枚**です。解答はすべて**対応する番号の解答用紙**の所定の**解答欄**（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
4. 下書き用紙は**３枚**です。下書き用紙の注意書きもよく読みなさい。
5. **受験番号**は，それぞれの解答用紙の所定の欄に必ず記入しなさい。
6. 配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

空　白

空　白

〔１〕　a を正の実数とする。座標平面上の曲線 B_a と曲線 C を次のように定める。

$$B_a : y = -\frac{1}{a}x^2 + 2, \qquad C : x^2 + y^2 = 1$$

以下の問いに答えよ。

(1) 点 P が曲線 B_a 上を動くとき，P と原点 O$(0,0)$ との距離の最小値を a を用いて表せ。

(2) 曲線 B_a と曲線 C が共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

(3) 点 P が曲線 B_a 上を動き，点 Q が曲線 C 上を動くとき，P と Q との距離の最小値を a を用いて表せ。

空　白

〔2〕 n を 2 以上の自然数とし，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ を $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ を満たす実数とする。n 個のデータ $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の平均値を m，標準偏差を s，中央値を M とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数

$$f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2$$

の最小値，およびそのときの x の値を n, m, s, M のうち必要なものを用いて表せ。

(2) n は偶数であるとする。このとき，関数

$$g(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + \cdots + |x - a_n|$$

は $x = M$ で最小となることを示せ。

(3) n は偶数であるとする。このとき，(2) の関数 $g(x)$ が最小値をとる x がただ一つであるための必要十分条件を，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ のうち必要なものを用いて述べよ。

空　白

〔３〕　以下の問いに答えよ。

(1) a と b を互いに素な自然数とし，自然数 n に対し

$$\frac{1}{n+1} < \frac{b}{a} < \frac{1}{n}$$

が成り立つとする。互いに素な自然数 c, d により

$$\frac{b}{a} - \frac{1}{n+1} = \frac{d}{c}$$

と表すとき，$d < b$ となることを示せ。

(2) S を 0 より大きく 1 より小さい有理数とする。このとき，S は異なる自然数 $n_1, n_2, \cdots, n_\ell$ の逆数の和として

$$S = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_\ell} \qquad (1 < n_1 < n_2 < \cdots < n_\ell)$$

と表すことができることを示せ。

空　白

〔4〕 面積が 1 である三角形 ABC がある。s, t を $s > 0, t > 0, s + t < 1$ を満たす実数とする。三角形 ABC の内部に，$\overrightarrow{\mathrm{AX}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす点 X をとる。直線 AX と辺 BC の交点を P，直線 BX と辺 CA の交点を Q，直線 CX と辺 AB の交点を R とする。三角形 BPX，三角形 CQX，三角形 ARX の面積の和を W とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{\mathrm{PC}}{\mathrm{BP}}, \dfrac{\mathrm{QA}}{\mathrm{CQ}}, \dfrac{\mathrm{RB}}{\mathrm{AR}}$ の値を s と t を用いて表せ。

(2) 三角形 BPX，三角形 CQX，三角形 ARX の面積を s と t を用いて表せ。

(3) $s = t$ のとき，W を求めよ。

(4) 点 Q が辺 CA の中点であるとき，W を求めよ。

空　白

〔5〕 n を自然数とする。赤い袋には 1 から n までの数字が書かれたカードが 1 枚ずつ合計 n 枚，青い袋には 1 から $3n$ までの数字が書かれたカードが 1 枚ずつ合計 $3n$ 枚入っている。まず，赤い袋からカードを 1 枚ずつ n 回引き，カードに書かれた数字を引いた順に $a_1, a_2, \cdots, a_n$ とする。次に，青い袋からカードを 1 枚ずつ n 回引き，カードに書かれた数字を引いた順に $b_1, b_2, \cdots, b_n$ とする。ただし，引いたカードを袋の中には戻さない。このとき,「すべての $k = 1, 2, \cdots, n$ に対して $a_k < b_k$」となる確率を P_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) P_2 を求めよ。

(2) P_n を n を用いて表せ。

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty} \log (P_n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。

(4) 極限値 $\lim_{n\to\infty} (P_n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。

空　白