広島大学附属中・高等学校中等教育研究紀要
〈第 67 号　2020〉

コンピュータを用いた生徒の予想をもとにした作図の授業実践

井　上　芳　文

本稿では，作図に関する授業実践の分析を通して，高等学校数学の図形領域における学習指導の在り方について検討を行う。高等学校１年生の数学Ａ（図形分野）の領域において，２本の線分の積が最小となる場合を考える作図の問題を扱い，コンピュータの利用による生徒の予想を足がかりとして展開する授業を実践した。この授業において，生徒は問題解決の過程を振り返ることによって証明の不備を補完し，条件を変えて課題をさらに発展させる活動を通して，図形に対する見方を深めることができたと考えられる。日々の授業を通して深い学びを実現するためには，問題解決の後に課題を主体的に発展させていくことが習慣化されるような，数学の学習に対する態度の変容を促すことが重要である。

１．はじめに

平成 30 年に告示された高等学校の学習指導要領では，社会構造の急激な変化の中でこれからの時代に求められる教育の姿が示され，教科の目標が「知識及び技能」,「思考力，判断力，表現力等」,「学びに向かう力，人間性等」の三つの点から整理されている。数学科に関しては，科目として数学Ｃが加わるとともに，それぞれの科目の中で学習する内容の刷新や配列の変更がなされている。

本稿では，作図の内容に関する授業実践の分析を通して，新しい学習指導要領の理念のもとでの図形領域の学習指導の在り方について検討を行う。

2. 学習指導要領における図形領域の学習

平成 30 年に告示された高等学校の学習指導要領では，数学 A の図形の性質の領域において，数学的な見方・考え方を働かせるような数学的活動を通して育成すべき資質・能力として次のような項目が挙げられている[1)]。

ア　次のような知識及び技能を身に付けること。
（ア）三角形に関する基本的な性質について理解すること。
（イ）円に関する基本的な性質について理解すること。
（ウ）空間図形に関する基本的な性質について理解すること。

イ　次のような思考力，判断力，表現力等を身に付けること。
（ア）図形の構成要素間の関係や既に学習した図形の性質に着目し，図形の新たな性質を見いだし，その性質について論理的に考察したり説明したりすること。
（イ）コンピュータなどの情報機器を用いて図形を表すなどして，図形の性質や作図について統合的・発展的に考察すること。

これらの資質・能力の育成を目指して行われる教科の学びを通して，十分な基本的知識や技能を基盤として数学を積極的に活用し，主体的に問題解決に関わりながら新しい価値を創造していくことのできる人材を育成していくことが求められる。

特に，変化に柔軟に対応し，コンピュータなどの情報機器をうまく利用しながら課題解決へとつなげる能力は，情報化の加速する時代の中ではその育成が急務である。このことから，新しい学習指導要領においても，図形の性質を学習する際の ICT の活用が意識的に重視されるべきものとして強調されている。国の施策として進められている GIGA スクール構想をはじめとして，生徒一人一人がコンピュータなどの情報機器を持った状態で学習を行う授業が当たり前になろうとしていることを考えると，生徒の数学的活動を ICT 機器の活用との関係性から整理して体系化することは重要な作業のように思われる。

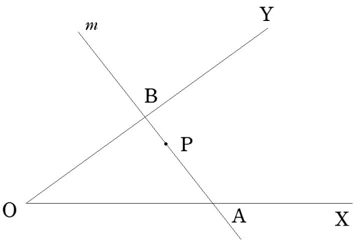
Yoshifumi INOUE：A Study on Teaching Geometric Construction based on the Expectation of the Student Using a Computer

3. 作図に関する学習指導の実践

(1) 授業実践の対象と扱う題材

対象：高等学校1年生
科目：数学A
単元：平面図形（作図）

授業で扱う数学的な内容は，図形に関する次の定理である。

> ∠XOY内に点Pをとり，Pを通る直線mが辺OX，OYと交わる点をそれぞれA，Bとする。このとき，PA･PBの値が最小となるのは，OA = OBの場合である。
>
> 
>

［証明］

図1のように，点Pを通る直線をOA = OBとなるようにとる。そして，Pを通る別の直線をひき，辺OX，OYとの交点をそれぞれC，Dとする。

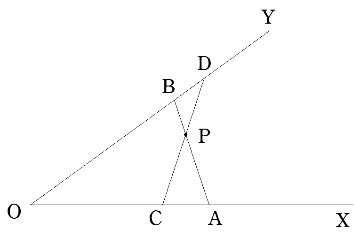


図1

∠OAB = ∠OBAであるから，これをθとおく。このとき，

$\angle ODC = \theta - \angle BPD < \theta$

ここで，$\angle BAC = \theta$ であるから，点Dは△ABCの外接円の外側にある。そこで，その外接円と線分CDとの交点をEとすると，方べきの定理から

PA･PB = PC･PE　･･･①

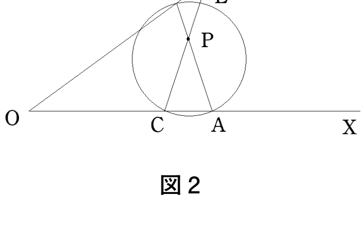


図2

さらに，

PE < PD　　　　･･･②

であるから，①②より

PA･PB < PC･PD

が成り立つ。　$\boxed{\text{終}}$

この定理を作図の学習内容として教材化し，高等学校数学Aの作図の単元において，高校1年生を対象にして授業を実践した。

(2) 授業の実際

①具体的操作活動と問題の意識化

ワークシートの図（**図3**）において「点Pを通る直線mを各自で1本引きなさい」という指示のみを与え，定規を用いて生徒に実際に作図をさせる。次に，できあがった自分の図において，直線と辺OX，OYとの交点をそれぞれA，Bとして，PA × PBの値を計算させる。そして，となりの生徒やクラスの他の生徒と結果を比べることによって，その最小値の存在に気付かせる。

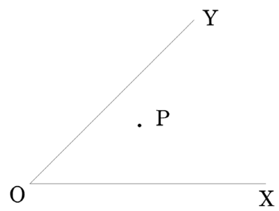


図3

②課題の設定と予想

「PA × PBの値が最小となるように直線mを作図せよ。」という課題を設定し，少し時間をとって自由に考察させる。なかなか解決への糸口がつかめない中で，コンピュータソフトウェアGRAPES[5)]を利用して今回の課題を改めて観察してみる。

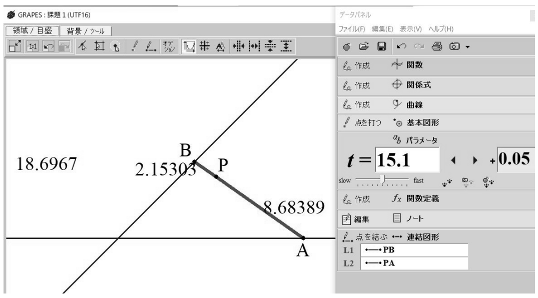


図4

Pを通る直線を変化させたとき，PA，PB，PA × PBの値が表示される画面（**図4**）を見ながら，課題に対する予想を持つ。コンピュータの示す図形から，理由は明らかでないにしてもかなり確信に近い予想として，OA = OBという事実が生徒に認識される。

③解決への考察

この段階では，解決への道筋はほとんど見えていない。そこで，自分が作図した（PA×PBが最小ではない）直線と，PA×PBが最小になっていると思われるOA＝OBの直線の関係に注目させる。OA＝OBの場合が最小ならば，自分が作図した直線でのPA×PBの値は，それより大きくなっているはずである。すなわち，そのことは自分の図の線分（これを線分CDとする）上にPA×PB＝PC×PEとなる点が存在していることを意味するので，△ABCの外接円の作図によってその点を探してみる（方べきの定理の利用）。そして，このときの図を用いて，自分が作図してできたC，Dに対して，PA×PB＜PC×PDとなっていることを示すことによって，OA＝OBとなっている場合のPA×PBが最小であることを結論づける。

④解決の振り返りと考察の深化

ア）証明の補完

実際の作図に入る前に，OA＝OBの場合にPA×PBが最小となることを示した議論を振り返ってみる。すると，いわゆる証明の中に「OA＝OB」という条件が登場していないことが分かる。そこで，この「OA＝OB」という条件が証明のどの部分に関わってくるのかという点に焦点を当てる。

授業では，証明の流れを振り返りながら，△ABCの外接円と線分CDとが本当に交わるのかという点を再度クローズアップして考察させることによって，OA＝OBという条件がこの作図の解に本質的に影響している点を確認する。これによって，与えた証明がより論理的に不備のないものとして補完されたことになる。

イ）作図

求める図形が備えるべき条件 OA ＝ OB を実現するように，直線 m を作図する。

ウ）課題の発展に向けて

授業で扱った課題では点Pを∠XOYの内側にとったが，これを外側にとったときに PA × PB の値が最小となる場合について，コンピュータを用いて予想させる（**図 5**）。

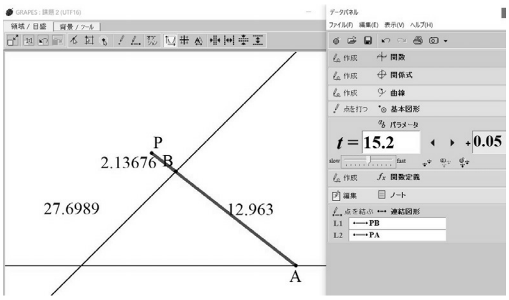


図 5

4. 課題に対するアプローチの多様性

今回と同じ題材での授業を，もう一つ別のクラスで実施している。そのクラスでは，具体的操作活動から課題「PA × PB が最小となるような直線 m を作図せよ」が設定された後に，生徒が個人で考える時間を数分間とり，その直後に次のような質問をしている（この段階では，まだコンピュータによる予想は行っていない）。

（質問）課題を提示されてから，与えられた数分の間で「何を考えたか」「何をしたか」あるいは「何をしようとしたか」を答えてください。

この質問に対して 37 人の生徒が回答しており，それをまとめたものが**表 1** である（1 人の生徒が複数の回答をした場合もある）。ただし，これらは考察を進めるだけの十分な時間が与えられたものではなく，あくまで課題に対する最初のアプローチ（本人が思いついた考察の方向性）について分類したものである。

表 1

内容	①方べきの定理	②特殊な場合	③複数の直線	④垂線	⑤円
人数	9	8	7	14	7
内容	⑥接線	⑦関数	⑧ ABの長さ	⑨その他	
人数	2	3	5	5	

①方べきの定理

求める値 PA × PB から，直前に学習した方べきの定理の利用の可能性を想起している。

②特殊な場合について考察する

できあがる三角形が，直角三角形や二等辺三角形などの特殊なものになる場合について考えている。

③複数の直線

最初に自分が引いたもの以外にいろいろな直線を引いている。

④ P から 2 辺に垂線を引く

P から OX，OY に対して垂線を引いている。（点 P と直線上の点とを結ぶそれぞれの線分の長さが最小となる場合を考えていると思われる。）

⑤円

何らかの円をつくり，そこに解決の糸口を見出そうとしている。具体的には，

・点 P を通る円

・OP を直径とする円

などがある。

⑥円の接線

円に加えて，その接線に注目しようとしている。

⑦関数として最小値を考える

線分の長さを変数として PA × PB を関数と捉え，その最小を考えようとしている。

⑧ AB の長さとの関係

PA × PB が最小となるときの AB の長さについて考えようとしている。この中には，AB が最小のときに PA × PB も最小となるのではないかと予想するケースが含まれている。

今回のように解決の方向性が容易に見いだせないような状況において，課題に対する生徒のアプローチにはこれだけの多様性がある。中でも，線分の長さを最小にするという視点から，垂線に注目する生徒が多く存在したが，その先の考察へはなかなか進むことができない状況であった。また，教室全体の指示によって，最初は生徒の目の前には自分が引いた直線が１本しかない状態であるが，③のようにそこから自分でさらにいろいろな直線を引くことによって，解や解決の見通しに見当をつけようとした生徒は７名で，特殊な場合の直線を引いた生徒は８名であった。

5. 図形領域での学習指導への示唆

(1) 問題に対する「予想」の位置づけ

相馬（2013）によれば，予想とは「問題の結果や考え方について見当をつけること」[2)] とされており，そこには直観で物事を捉える場合も含まれている。これまでの学習指導を振り返ってみても，課題に対して「予想」を行うことは，学習者と数学的対象との距離を縮め主体的な学習を促すのに効果的なものと考えられる。

しかし，実際に生徒が行う「予想」には，その中に論理性がどの程度含まれるのかという点において，いくつかのレベルが存在する。その予想が，ある程度の根拠と理由付けが可能な場合，そこから生徒が数学的な考察をスタートできることも多い。ところが，その予想が表面的な情報からの気づきの域を出ない場合，そこには論理性が乏しく，解決のための核心部分に考察を進めていくことが困難な場合が多い。

予想が論理性を伴わない表面的なものとなるとき，その要因として２つの場合が考えられる。一つは，生徒の，既習の知識や経験の関連づけの能力が十分でないとき，予想は有機的な結びつきを持たない，ある種の表面的な言及となってしまう。

そして，もう一つは，問題の構造上，そこに解決の糸口や内在する知識の関連性が見えにくい場合である。例えば，**図 6** のような「半径の異なる２円が A，B で交わっているとき，２円への接線の長さを等しくするにはどこから接線を引けばよいか」という課題を考えてみる。

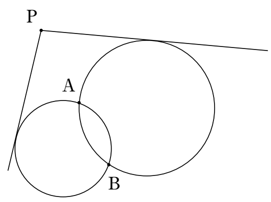


図 6

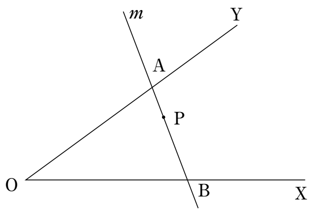


図 7

この課題では，いくつかの実験によって条件を満たす点 P の位置を「直線 AB 上」と予想したとき，目の前の情報（A，B を結んだ直線）がそのまま論理的な議論の手がかりとなる。実際に証明においても，直線 AB の存在が議論の促進に大きな役割を果たし，解決への見通しが持ちやすい構造となっている。ところが，今回の授業で扱った課題（**図 7**）については，OA ＝ OB がかなり強い確信をもって予想されるものの，その図形がすぐに議論の糸口とはなりにくい。このような場合には，議論に入っていけるような「足場」が必要であり，今回の授業実践では，最小と予想した線分と，自分が引いた線分との比較の場面を設定することで，解決につながる議論を促すように工夫されている。

予想が表面的になる要因は，このように学習者の側と数学の側の双方に存在しうるが，両者の様相を的確に把握しながら，授業展開の構成を検討しなくてはならない。生徒の予想をもとにした授業展開は，主体的な学びという点から非常に効果的なものであるが，その予想が論理性を含まない表面的なものとなる場合には，学習理解の状況に応じて補助的な支援を工夫したり，議論の入り口となり得る適切な場面を設定したりすることで，生徒自らが積極的に思考を組み立てていけるような授業展開を検討することが重要である。

(2) 具体的操作と ICT 活用

今回の授業では，最初に定規を使って自分で直線を引き，その自分たちの具体的操作の結果を共有する中で探究すべき課題を浮かび上がらせている。そして，解決が困難な課題が提示されたときの生徒の反応として，**表 1** からも明らかなように，さらなる実験によって解を予想しようとする生徒はそれほど多くはない。予想や解決の見通しを持つために多くの具体的操作が必要となる場合，そこでのコン

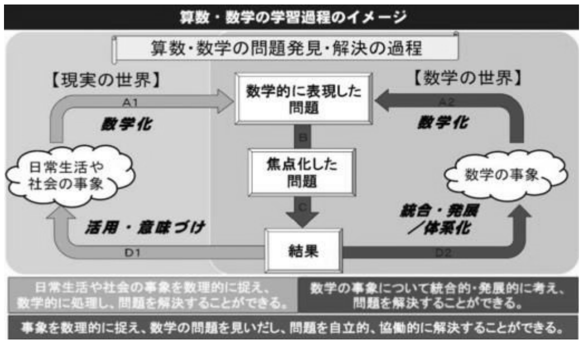


図８　算数・数学の学習過程のイメージ[3)]

※文部科学省「高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編」（2018 年）より

ピュータ使用の選択肢は，さらなる生徒の活動を促進させる存在となり得る。このことは，数学的対象としての図形を動的に扱うことが必要な場面においても顕著である。

また，課題に関する考察をすすめる中で，３点を通る円を準備する場面（**図２**）において，生徒は定規とコンパスを用いて，かなりの時間を要して必要な円を作図したが，その円をコンピュータによって作成することも考えられる。同一直線上にない３点を通る円が存在するという事実が教室全体で共有され，その作図技能の定着に不安がない場合には，その図の作成をコンピュータで行うことで，考察の流れを途切れさせることとなく，生徒の思考をスムーズに進めさせることができる。これに加えて，コンピュータの利点を活かして図形を自由に変形させることによって，「どのような場合でも線分の端点Ｄが外接円の外側にある」という事実を効果的に実感させることもできると考えられる。

(3) 振り返りによる問題解決の補完

問題解決の過程や結果を振り返り，自らの考え方を深める学習活動は，授業の中でも重要な場面である。今回の授業では，作図問題の「解析」「証明」にあたる部分を教室全体で振り返る中で，その不足部分についての考察を生徒自身にさせている。これは，議論が不十分な点や論理性の不足を指摘することによって，自分たちの考えを全体として精緻化していくことを促す場面であり，学習で得られたものをより良いものにしようとする態度の育成にも寄与する活動である。このように，はじめから細部にこだわりながら証明を完成させるばかりではなく，いったん出来上がったものをより精緻化するという学習場面が，対話的，主体的で深い学びを促す上では効果的な役割を果たすと考えられる。

(4) 課題の発展と考え方の統合

数学の学習過程では，**図８**に示されるように現実の世界と数学の世界での２つのサイクルが考えらえる。このサイクルは１つの題材に関して，左右にまたがってまわることもあれば、片方のみを複数回まわることもあり得る。いずれにしても，数学の学習においては，問題解決を通して解決や結果が得られたとき，さらにそれを発展させたり，考え方を統合したりしながら主体的に学びを進めていくことが重要である。

今回の授業の最後の場面では，もとの課題の条件を変えてみることで発展的な考察を促している。この場面では，条件の変更によって，元の問題と「変わる部分」と「変わらない部分」に注目することで、図形に対する多面的な見方を促すことを狙っている。また,「設定を変えたらどうなるのだろうか」という発展的な見方とともに , 証明にあたってもとの問題と同じ考え方が利用できるか（あるいはできないか）という視点での考察によって，統合的な見方を促すことが可能となる。さらには，点Ｐを外側にとる場合に，点Ｐの位置による解の変化の様子を考察させたり，あるいは辺 OX，OY を延長した直線も含めて考察させたりすることもできる。

課題を発展させて考察するこの場面は，授業構成や生徒の状況に応じて授業外の時間に取り組ませることも可能である。１時間の授業の中でこれを考察する十分な時間がなくても，今回の実践のように授業の最後の短い時間でコンピュータを用いて予想させることで，生徒の関心と意欲を喚起することができ，それが発展的な考察を促す機会となる。課題を解決した後の，これらの「自分の活動を振り返り，発展的に物事を考えてみる」という学習者の主体的な姿勢は，**図８**のような学習のサイクルをまわしていく推進力の一つとなり得る。重要なのは，このような活動を１時間の授業の中だけで完結させることではなく，問題解決を通して得られた結果や考え方を発展させていくことの習慣化によって，学習者の学びに対する姿勢を変容させることである。

６．おわりに

これからの社会において，先の見通せない，一見すると解決が困難な問題に直面したときに，予想と見通しを持ちながら解決の方法を模索し，工夫しながら解決に向かって進んでいく力はとても重要なものとなる。数学の学習を通して，こうした能力の育成に寄与することのできる授業づくりが，新しい時代の教育にも求められている。また，情報機器が常に身近にある現在においては，ICT の利用と具体的操作活動とのバランスを考慮した授業づくりが必要

で，さらには評価の在り方についても，この情報機器利用の観点から再考すべき時期にきていると考えられる。

引用文献・参考文献

1）文部科学省，『高等学校学習指導要領（平成30年告示)』，2018年，98.
2）相馬一彦編著『「予想」で変わる数学の授業』，明治図書出版，2013年，20.
3）文部科学省，『高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説　数学編理数編』，2018年，26. https://www.mext.go.jp/content/1407073_05_1_2.pdf（2020.12.20閲覧）
4）小林幹雄，『初等幾何学』，共立出版，1958年

使用ソフトウェア

5）GRAPES（https://tomodak.com/grapes/）2020.12.20閲覧

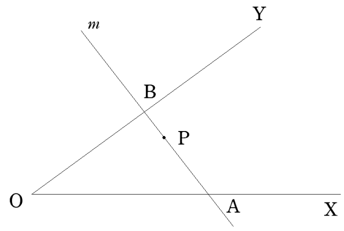
A Study on Teaching Geometric Construction based on the Expectation of the Student Using a Computer

Yoshifumi INOUE

Abstract:

The purpose of this study is to examine the figure instruction of high school mathematics by analyzing the lesson with regard to geometric construction. I practiced a class based on expectation of the student using a computer, and the problem of drawing figures when the product of the length for two drawn lines was minimized was included by the class. The student supplements a defect of the proof by looking back on the process of the solution to the problem, and, through an activity to change the condition of the original problem and to develop the problem further, they were able to deepen the viewpoint for the figure. It is important that we promote transformation of the attitude of the student toward learning mathematics through developing the problem voluntarily.

学習指導案

学習内容	学習活動	指導上の留意点・評価
（導入） ・問題の意識化	◯具体的操作と課題の抽出 点Pを通る直線mとOX，OYが交わる点を，それぞれA，Bとして，PA，PBの長さを測ってみよう。 ・生徒一人一人がワークシート上に作図を行い，それぞれがPA，PBの長さを定規で測る。 ・PA × PBの値を計算させ，その値がそれぞれ異なっていることを確認させる。 ・生徒どうしでPA × PBの値を確認させ，最小値の存在に気付かせる。	 ・直線のとり方によって値が変わることに気付かせる。
・課題の設定	◯課題の設定とコンピュータからの予想 PA × PBが最小となるような直線mを作図せよ。	
・観察と予想	・はじめに，試行錯誤させながら一人一人に予想を持たせる。 ・コンピュータを利用して直線mをいろいろに作図し，そのときのPA × PBの値の変化を観察する。 ・OA ＝ OBの場合が最小となることを予想する。	
（展開） ・方べきの定理の想起と考察	◯解決に向けた考察 ・PA･PB ＜ PC･PDという予想から，PA･PB ＝ PC･PEとなる点Eの存在を予想し，その点Eを求める方法を考察させる（△ABCの外接円の想起）。 ・点Eを求めた図を振り返りながら，証明について考察させる。	・方べきの定理を用いて，予想した作図方法が正しいことを証明することができる。 【数学的な技能】
・振り返りと探究	◯解決の振り返りと証明の補完 今回の証明において，OA ＝ OBという条件はどこに関わっているか。 ・作図方法の決定を行う中で，予想していた「OA ＝ OB」という条件の果たす役割について考察する。	・必要な部分を補って証明を完成させる。
・証明の補完と作図	・考察結果を反映させて証明を補完する。 ・作図を行う。	・求めるべき条件を備えた図形を作図することができる。 【数学的な技能】
（まとめ）	◯本時の学習のまとめ ・活動－予想－ 証明 の流れをふり返りながら，本時の内容をまとめる。 ・課題の発展性について触れる。	・Pを∠XOYの外側にとった場合について言及する。
使用ソフトウェア ・GRAPES (https://tomodak.com/grapes/)		