中等教育研究開発室年報　第 34 号（2021 年 3 月 31 日発行）別冊電子版
2020 年度　授業実践事例

数学科　高等学校第Ⅱ学年

ベクトル―三角形や四面体の重心に関する性質を調べよう―

授業者　森脇　政泰

（教育研究大会　公開授業）

広島大学附属中・高等学校

高等学校　数学科　学習指導案

指導者　森脇　政泰

日　　時　令和２年 12 月 4 日（金）　第３限 10:40～11:30

場　　所　数学教室

学年・組　高等学校Ⅱ年５組 40 人（男子 18 人　女子 22 人）

単　　元　ベクトル

目　　標　1. ベクトルに興味・関心をもち，それらを数学的な問題解決に活用しようとする。（主体的に学習に取り組む態度）

2.ベクトルの考えを用いて図形の性質を考察することができる。（思考・判断・表現）

3. ベクトルの考えを用いて図形の性質を表現し，処理することによって的確に問題を解決することができる。（知識・技能）

4. ベクトルの性質について理解している。（知識・技能）

指導計画（全 40 時間）

第一次　平面上のベクトル　　23 時間

第二次　空間のベクトル　　14 時間

第三次　ベクトルのまとめ　　3 時間（本時 2/3）

授業について

高等学校数学科における探究的な学びの一層の充実に向けて，次期学習指導要領で重視されている学習過程の一部（数学的に問題を表現する→結果を得る→発展させる）を取り入れたベクトルの授業を提案する。この提案授業には，本校の提案した「探究ファクター」にある「試行錯誤する」，「まとめる」，「磨く」を組み込んでいる。

本時で扱う問１は「△ABC の辺 BC，CA，AB を 1 : 2 に内分する点をそれぞれ P，Q，R とするとき，△ABC と△PQR の重心は一致する」という性質を，文字とベクトルを用いて一般化した問題である。一般化する前の問題は，指導計画の第一次で扱った。問１を解決した後の問２では，四面体の重心について，この点と一致する問１のような条件を考える。ここで，「四面体の重心」と「一直線上にない 3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)に対し，点 P($\vec{p}$)が平面 ABC 上にあるための条件は，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$，$s+t+u=1$となる実数 s，t，u が存在することである」は発展的な内容として，本時までに学習している。問２では，問１の 3 点 P，Q，R を定める位置ベクトルの式の形や解決の過程での式の変形などを振り返って，数学的な問題として表現し直してから解決することになる。このように，問２はベクトルの代数的な性質による解決が想定されるため，もとの重心と一致する重心を持つ四面体をグラフソフトで観察しその頂点の位置を確認して，図形の性質が把握できるようにする。まとめでは，本時の学習全体を振り返るとともに，さらにどのようなことが考えられるか検討し，解決した性質に関連する問いや新たな問題に関わる気付きを全体で共有して「探す」につなげたい。

題　　目　三角形や四面体の重心に関する性質を調べよう

本時の目標

1. ベクトルを用いて三角形の重心に関する性質を証明する。
2. 四面体に対して三角形の重心の性質と類似した性質を考察し，ベクトルを用いて定式化し証明する。

本時の評価規準（観点／方法）

1. ベクトルを用いて三角形の重心に関する性質を証明することができる。
2. 三角形の重心に関する性質の条件と証明の道筋を手がかりに，四面体の重心に関する性質を考察し，ベクトルを用いて定式化し証明できる。

（思考・判断・表現，知識・技能／学習活動の様子の観察，ワークシート）

本時の学習指導過程

<table>
<tr><th>学習内容</th><th>学習活動</th><th>指導上の留意点</th></tr>
<tr><td>（導入）</td><td>1　問題の把握</td><td></td></tr>
<tr><td>●平面上の三角形の重心に関する性質を調べる</td><td colspan="2">問１　3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)を頂点とする△ABC において，直線 BC，CA，AB 上の 3 点 P($\vec{p}$)，Q($\vec{q}$)，R($\vec{r}$)をそれぞれ
$\vec{p} = s\vec{b} + t\vec{c}$，$\vec{q} = s\vec{c} + t\vec{a}$，$\vec{r} = s\vec{a} + t\vec{b}$ $(s + t = 1)$
とする。このとき，△ABC と△PQR の重心の関係を調べよう。</td></tr>
<tr><td></td><td>・図をかいたり，式を変形したり，s と t に値を代入したりして考察する。</td><td></td></tr>
<tr><td>（展開）
●問１の解決</td><td>2　問題の解決
・△ABC と△PQR の重心が一致することを証明する。
・全体で証明の道筋を確認する。</td><td>
〇任意の三角形で成立すること，3 点 P，Q，R がそれぞれ外分点でも成立することを指摘する。</td></tr>
<tr><td>●四面体に対して，問１に類似した性質を考察する</td><td>3　四面体の場合の考察
・次の問２に取り組む。</td><td>〇四面体の重心と，その位置ベクトルを復習する。</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">問２　四面体の重心について，この点と一致する問１のような条件を考えよう。</td></tr>
<tr><td>試行錯誤する</td><td>・問１の P，Q，R に相当する点を四面体で何個取るか考える。
・問１の P，Q，R の条件を振り返り，重心が一致すると予想される四面体の頂点の位置ベクトルを式で表す。
・全体で，この 4 頂点の条件と証明の道筋を確認する。</td><td>〇点を各面に１つずつ取ると，4 点が得られることに触れる。

〇この 4 頂点の位置関係をグラフソフトで示す。</td></tr>
<tr><td>（まとめ）
まとめる
磨く</td><td>4　学習の振り返りとまとめ
・本時に得られた図形の性質をまとめる。
・さらにどんなことが考えられるか検討し，全体で共有する。</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">備考　準備物　ワークシート，演示用のコンピュータとディスプレイ
使用ソフト　GRAPES，3D-GRAPES</td></tr>
</table>

実践上の留意点

探究的な学習の題材としては問１も重要であるが，この授業で中心となる課題は問２である。問２では，次の性質を見いだすことを目指す。

（性質１）空間で４点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$), D($\vec{d}$) を頂点とする四面体 ABCD において，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$，$\vec{q}=s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$，$\vec{r}=s\vec{c}+t\vec{d}+u\vec{a}$，$\vec{s}=s\vec{d}+t\vec{a}+u\vec{b}$（$s+t+u=1$）で定まる点をそれぞれ P($\vec{p}$)，Q($\vec{q}$)，R($\vec{r}$)，S($\vec{s}$)とするとき，四面体 ABCD の重心と四面体 PQRS の重心は一致する。

問２の取り組みが進展しなければ，次のような働きかけをすることが考えられる。

①問１の結果から，四面体の重心と，重心が一致すると予想されるもう１つの図形は何か

②問１の P，Q，R に相当する点は，何個取ればよいか

③問１の P，Q，R は直線上の点（**図１**，**図２**）であったが，四面体ではどこに取るか

④四面体 ABCD の重心と，各面の重心 P，Q，R，S でできる四面体 PQRS（**図３**）の重心は一致するか

⑤問１の P，Q，R の位置ベクトルから，重心が一致するもう１つの四面体の頂点はどのような位置ベクトルか

①～⑤は状況に応じて，一部だけ取り上げたり順序を変更したりすることが想定される。

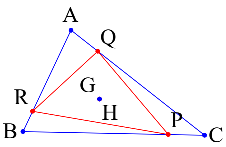

図１

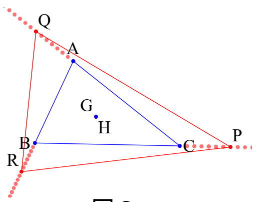

図２

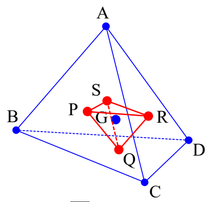

図３

性質１を見いだし確認した後に，四面体 ABCD の各面の重心 P，Q，R，S（位置ベクトルが $s=t=u=1/3$ の場合）の位置（**図３**）をグラフソフトで観察するとともに，s,t,uの値を変えて４点が重心でない場合も確認すると，この４点の位置の理解が深まると期待される。

必要があれば，性質１の P，Q，R，S の位置については，以下のような授業の展開も考えられる。

・問１の P，Q，R の位置ベクトルの式を$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$（$t$は実数）と変形し，$0<t<1$ の場合の P，Q，R の位置と有向線分 BP，CQ，AR を**図１’**で確認する。

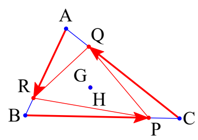

図１’

・性質１の位置ベクトルの式も $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+u\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{BC}}+u\overrightarrow{\mathrm{BD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CR}}=t\overrightarrow{\mathrm{CD}}+u\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DS}}=t\overrightarrow{\mathrm{DA}}+u\overrightarrow{\mathrm{DB}}$（$t,u$は実数）と変形し，$t>0, u>0, 0<t+u<1$ の場合に，△ABC において，$\overrightarrow{\mathrm{AP'}}=\frac{t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+u\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{u+t}$ で定まる辺 BC 上の点 P’を取り，P’が辺 BC を $u:t$ に内分し，点 P が線分 AP’を $\mathrm{AP'}:\mathrm{AP}=1:(t+u)$ と内分することや，その位置を**図４**で確認する。Q，R，S も同様であることに触れ，P，Q，R，S の位置と有向線分 AP，BQ，CR，DS を**図５**で確認する。

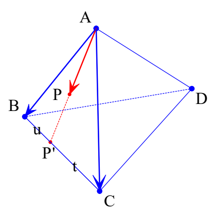

図４

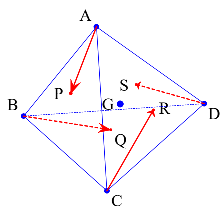

図５

・**図１’**と**図５**を比較して，性質１の P，Q，R，S の位置を確認する。

・性質１で $t<0$ などの場合を考察し，より一般の P，Q，R，S の位置を理解する。

本時のまとめにおいて，問１と問２で明らかになった性質の振り返りから，「三角形の他の五心でも成り立つか」，「四面体の垂心などは存在するか」といった気付きや意見が挙がれば，大いに評価したい。実際にこの授業を実施した後，生徒から「多角形の重心はあるか」「四角形の重心の位置ベクトルと四面体の重心の位置ベクトルは，同じ式で表されるのではないか」といった質問が挙がった。