令和４(2022)年度広島大学理学部

物理学科

第３年次編入学試験学力検査問題

筆記試験（物理，数学）（４問）

令和３年９月８日
自　　９時００分
至　１１時００分

答案作成上の注意事項

1．　この問題冊子には物理，数学の問題が計４問，総ページ数は表紙を入れて５ページある．
2．　解答用紙は４枚ある．解答は全て問題番号と同じ番号の解答用紙に記入すること．紙面が不足する場合は，表面に明示の上，裏面も解答に用いよ．
3．　下書き用紙は３枚ある．試験終了後，持ち帰ること．
4．　受験番号は，全ての解答用紙（１箇所）の所定の欄に必ず記入すること．
5．　配付した解答用紙と下書き用紙は，持ち出さないこと．

問1　力学

下図のように，質点Aと質点B（共に質量は m）が x 軸上にあり，この軸に沿って1次元的な運動を行っている．x 座標の原点をOとし，正方向を右向きにとる．ふたつの質点の間には質点間の距離の二乗に逆比例する斥力が作用している．質点AとBの距離が d の場合，Aには図の左向きに，Bには右向きにそれぞれ大きさ e/d^2（e は正の定数）の力が働く．一方，ふたつの質点を原点O近傍にとどめるため，両質点に対して座標 x に比例する次のような復元力 F を加えたとする：

$$F=-kx \quad (k\text{ は正の定数})$$

以下の問いに答えよ．

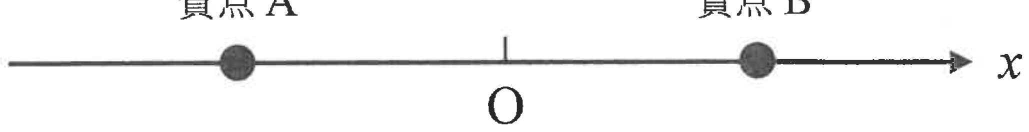
(1) 時刻 t における質点Aの座標を x_A，質点Bの座標を x_B として，それぞれの質点に対するニュートンの運動方程式を書き下せ．

(2) 斥力と復元力が釣り合って，質点Aは座標 $x_A=a$ に，質点Bは座標 $x_B=b$ にそれぞれ静止している．この場合の座標 a および b を求めよ．

(3) 前問(2)で求めた平衡点の周りで質点AとBが微小振動を行っている．平衡点からのずれを質点Aに対して $y=x_A-a$，質点Bに対して $z=x_B-b$ のように定義し，$|y/a|\ll 1$，$|z/b|\ll 1$ とする．問(1)で求めた運動方程式を使って，y および z が満たす（高次の微小量を無視した）線形微分方程式を導け．必要なら，次の近似式を用いよ：

$$\frac{1}{(1+\delta)^2}\approx 1-2\delta \quad (\text{ただし，}|\delta|\ll 1\text{とする})$$

(4) 平衡点の周りでの微小振動はふたつの基準振動の重ね合わせとして表現できる．ふたつの基準角振動数を求めよ．



問 2　電磁気学

真空中で，半径 R の導体球に正の電荷 Q を与えた．導体球の中心からの距離を r，真空の誘電率を ε_0 として，以下の問いに答えよ．

(1) この導体球の内部および外部に形成される電場の大きさを求めよ．

(2) この導体球の静電容量を求めよ．ただし，静電ポテンシャルは無限遠で 0 とする．

(3) この導体球が持つ静電エネルギーを求めよ．

(4) 導体表面上の点 P を考える．点 P 近傍の微小領域では，導体表面は平面とみなすことができる．この微小領域の電荷が導体球の内側に作る電場の大きさを求めよ．また，その電場の向きを答えよ．

(5) 前問(4)において，点 P 近傍の微小領域の電荷 Δq が受けるクーロン力の大きさを求めよ．

問 3　熱力学

1. ピストンのついた密閉されたシリンダー内に理想気体が入っている．気体の圧力，絶対温度および体積をそれぞれ P，T および V とする．このとき，以下の問いに答えよ．

   (1) 以下の空欄に適切な式を記入せよ．
   シリンダー内の気体に外部から仕事 δW，熱量 δQ が加わったとき，気体の内部エネルギー U の変化 dU は $dU =$ $\boxed{\quad ① \quad}$ で与えられる．ピストンをゆっくり動かし，気体の体積が dV だけ変化したとすると，$\delta W =$ $\boxed{\quad ② \quad}$ である．一般に，加えた熱量 δQ とエントロピー S の変化 dS の間には，不等式の関係 $\boxed{\quad ③ \quad}$ がある．以上②，③を①へ代入して，$\boxed{\quad ④ \quad}$ の関係を得る．

   (2) T および V が一定のままで系の状態が変化するとき，ヘルムホルツの自由エネルギー $F = U - TS$ は減少することを示せ．

   (3) T および P が一定のままで系の状態が変化するとき，ギブスの自由エネルギー $G = F + PV$ は減少することを示せ．

2. 断熱壁に囲まれた体積 V の容器が，断熱材で作られた仕切りによって領域 I と領域 II に分けられている．領域 I は真空である．体積が V_0 の領域 II には単原子分子理想気体が 1 モル入っていて，絶対温度 T_0 で熱平衡状態にある．この状態を状態 A とする．状態 A から仕切りを急に外したところ，理想気体は容器全体にひろがり，やがて熱平衡状態に達した．この熱平衡状態を状態 B とする．気体定数を R とし，以下の問いに答えよ．

   (1) 状態 A から状態 B へ変化したときの，理想気体の内部エネルギーの変化量を求めよ．

   (2) 状態 A から状態 B へ変化したときの，理想気体の温度の変化量を求めよ．

   (3) 状態 A から状態 B へ変化したときの，理想気体のエントロピーの変化量を求めよ．

問 4　　数学

以下の問いに答えよ．

(1) 次の行列の逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列の固有値，および規格化された固有ベクトルを求めよ．

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

ただし，$i=\sqrt{-1}$である．

(3) 行列Aが$A^2=A$を満たすとき，Aの固有値は0か1のみであることを示せ．

(4) 直交座標系のx軸，y軸およびz軸方向の単位ベクトルをそれぞれ$\vec{i}$，$\vec{j}$および$\vec{k}$とする．ベクトル関数$\vec{A}$が$\vec{A}=2x\vec{i}+3y\vec{j}+4z\vec{k}$で定義されている．原点を中心とする半径1の球面をSとするとき，面積分$\int_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS$を求めよ．ただし，$\vec{n}$はS上の外向き単位法線ベクトルである．

(5) 次の微分方程式を解け．ただし，$x=0$のとき$y=2$とする．

$$\frac{dy}{dx}=y^2\cos x$$

(6) 次の積分を求めよ．

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

ヒント：重積分$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$を考えてみよ．