解答用紙

| 受験番号 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

問 1　力学

(1)
質点 A の運動方程式：

$$m\frac{d^2x_A}{dt^2}=-kx_A-\frac{e}{(x_A-x_B)^2}$$

質点 B の運動方程式：

$$m\frac{d^2x_B}{dt^2}=-kx_B+\frac{e}{(x_A-x_B)^2}$$

(2)
問題の対称性から，明らかに $a=-b$ である．前問で求めた質点 A の運動方程式に $x_A=a$ および $x_B=-a$ を代入すれば，

$$0=-ka-\frac{e}{(2a)^2}$$

$$\therefore\quad a=-\sqrt[3]{\frac{e}{4k}}$$

質点 B の座標は $b=\sqrt[3]{e/4k}$ である．

(3)
$x_A=y+a$ および $x_B=z-a$ を問(1)の運動方程式に代入すると，

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-k(y+a)-\frac{e}{(y-z+2a)^2},\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=-k(z-a)+\frac{e}{(y-z+2a)^2}$$

が得られる．$|(y-z)/2a|\ll 1$ であることに留意し，公式 $1/(1+\delta)^2\approx 1-2\delta$ を使って右辺第二項を線形化すると

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2y}{dt^2}=-2ky+kz & \text{(a)} \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2}=ky-2kz & \text{(b)} \end{cases}$$

が導かれる．上式の導出に際し，$a=-\sqrt[3]{e/4k}$ であることを使った．

(4)
問(3)で求めた式(a)と式(b)の辺々を加えて

$$\frac{d^2X_+}{dt^2}=-\omega_+^2X_+$$

を得る．ここで，$X_+=y+z$ とおき，角周波数 $\omega_+=\sqrt{k/m}$ を導入した．上式は調和振動の方程式で，解の角周波数は $\omega_+$ である．

次に式(a)と式(b)の辺々を引き算し，$X_-=y-z$ とおくと

$$\frac{d^2X_-}{dt^2}=-\omega_-^2X_-$$

が得られる．ここで，$\omega_-=\sqrt{3k/m}$ とした．この調和振動子の角振動数は $\omega_-$ である．以上より，求める基準振動数は $\sqrt{k/m}$ および $\sqrt{3k/m}$ である．

（別解）$y=c_1e^{i\omega t}$ および $z=c_2e^{i\omega t}$（$c_1$，$c_2$, $\omega$ はいずれも定数）のような解を仮定して固有値問題を導き，特性方程式から基準振動数を求めることもできる．

解答用紙

| 受験番号 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

問2　電磁気学

(1)

$r<R$ のときは導体内部なので， $E=0$.

$r>R$ のとき，ガウスの法則より

$4\pi r^2 E=\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ なので， $E=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

(2)

静電ポテンシャルは $r>R$ のとき，

$$\phi(r)=\int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

導体球の表面で電位は $\phi(R)=Q/4\pi\varepsilon_0 R$ なので，静電容量の定義より，

$$C=4\pi\varepsilon_0 R.$$

(3)

電場に蓄えられているエネルギーは，

$$U_E=\int\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\,dV=\frac{1}{2}\int_R^\infty \varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2\,dr$$

$$=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty\frac{1}{r^2}dr=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

(別解 1) 無限遠から微小な電荷 $dQ'$ を球面上に運ぶ仕事を積分すると，

$$U=\int_0^Q\frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 R}dQ'=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

(別解 2) 静電容量 $C$ のコンデンサーに電荷 $Q$ が蓄えられ，電位 $V$ にある時，静電エネルギーは，

$$U_C=\frac{1}{2}QV\left(=\frac{1}{2}CV^2\right)=\frac{1}{2}Q\cdot\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

(4)

電荷密度 $\sigma$ の平面が作る電場は平面に対して垂直であり，底面積 $S$ の円柱状の閉曲面を考えると，ガウスの法則より， $2SE=S\sigma/\varepsilon_0$.

点 P 近傍の電荷が球面の内側に作る電場 $E$ の向きは内向きである．電荷密度は $\sigma=Q/4\pi R^2$ なので，その大きさは

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

(5)

球面の内側は $E=0$ なので，前問(4)の電場と同じ大きさで外向きの電場から $\Delta q$ が受けるクーロン力 $\Delta F$ の大きさは，

$$\Delta F=\frac{Q\Delta q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

解答用紙

| 受験番号 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

問 3　熱力学

1

| | | |
|---|---|---|
| (1) | ① $\delta Q + \delta W$ | ② $-PdV$ |
| | ③ $TdS \geq \delta Q$ | ④ $dU \leq TdS - PdV$ |

(2) ヘルムホルツの自由エネルギー $F$ は

$$F = U - TS$$

で定義される．温度が一定のまま変化するので

$$dF = dU - TdS - SdT = dU - TdS \qquad (\text{ア})$$

体積が一定のまま変化するので $\delta W = -PdV = 0$ である．よって熱力学第一法則は，

$$dU = \delta Q \qquad (\text{イ})$$

となる．熱力学第二法則から得られる不等式 $\delta Q - TdS \leq 0$ は，(イ)より

$$dU - TdS \leq 0 \qquad (\text{ウ})$$

となる．(ア)と(ウ)より

$$dF \leq 0$$

よって $F$ は減少する方向へ変化する．

(3) ギブスの自由エネルギーは

$$G = F + PV = U - TS + PV$$

で定義される．温度と圧力が一定のまま変化するので

$$dG = dU - SdT - TdS + PdV + VdP = dU - TdS + PdV \qquad (\text{エ})$$

熱力学第二法則から得られる不等式 $\delta Q - TdS \leq 0$ は，熱力学第一法則を用いると

$$dU + PdV - TdS \leq 0 \qquad (\text{オ})$$

となる．(エ)と(オ)より

$$dG \leq 0$$

よって $G$ は減少する方向へ変化する．

2

(1) 状態 A から状態 B への変化は断熱膨張である．このとき，理想気体に熱量は加えられないし，外部からの仕事もない．よって，熱力学第一法則より，理想気体の内部エネルギーは変化しない．

(2) 理想気体の内部エネルギーは温度のみの関数である．(1)の結果から，理想気体の温度変化はゼロである．

(3) エントロピーは状態量なので，始状態と終状態が同じであれば，途中の変化は本質的ではない．よって，ここでは準静的等温変化として考えることにする．準静的等温変化の過程における理想気体の内部エネルギー，体積およびエントロピーの微小変化をそれぞれ $dU$，$dV$ および $dS$ とする．これらの間には熱力学第一法則より $dU = T_0 dS - PdV$ が成り立つ．ここで，$P$ は理想気体の気体の圧力である．$dU = 0$ なので，$dS = PdV / T_0$ を得る．1 モルの理想気体の状態方程式 $PV = RT_0$ を用いると，$dS$ は

$$dS = R\frac{dV}{V}$$

よって、状態 A から状態 B へ変化したときのエントロピーの変化は

$$\Delta S = R\int_{V_0}^{V} \frac{dV}{V} = R\log\left(V/V_0\right)$$

断熱自由膨張は不可逆で，準静的でもないが，エントロピー変化はこれに等しい．

解答用紙

| 受験番号 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

問４　数学

(1)

$$\frac{1}{-36}\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 \\ 1/6 & -1/6 \end{pmatrix}$$

(2)

固有値を$\lambda$とすると，特性方程式は

$$\begin{vmatrix} \lambda & -i \\ i & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

よって，固有値は $\lambda = \pm 1$.

次に固有ベクトルを求める．固有ベクトルを$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$と書くことにする． $\lambda=1$ のとき，固有方程式 $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$より $ia = b$を得る．よって，規格化された固有ベクトルは， $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$のとき，固有方程式$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$より $ia = -b$を得る．よって，規格化された固有ベクトルは， $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

(3)

固有値を $a$，固有ベクトルを $\vec{x}$として

$$A\vec{x} = a\vec{x}$$

$$A^2\vec{x} = A(A\vec{x}) = A(a\vec{x}) = a(A\vec{x}) = a(a\vec{x}) = a^2\vec{x}$$

と書ける．行列 $A$ は $A^2 = A$ を満たすので，上式から $a^2\vec{x} = a\vec{x}$ であることが分かる．したがって， $a(a-1) = 0$ であり，固有値として 0 と 1 を得る．

(4)

ガウスの発散定理より，

$$\int_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\vec{A}\,dV$$
$$= \int_V 9\,dV$$
$$= 12\pi$$

(5)

$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int \cos x\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = \sin x + C \quad (C\text{ は積分定数})$$

ここで $y(0)=2$ なので， $C=-0.5$．よって，

$$y = \frac{1}{0.5 - \sin x}.$$

(6)

重積分 $J = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ の積分変数を極座標 $(r,\theta)$へ変換すると，$J$は次のように計算できる：

$$J = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr = 2\pi\int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = -\pi\int_0^{\infty}\frac{de^{-r^2}}{dr}dr$$

$$= -\pi\left[e^{-r^2}\right]_0^{\infty} = \pi$$

他方， $J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = I^2$ と書けるので， $I = \sqrt{\pi}$ であることが分かる．