

広島大学大学院先進理工系科学研究科

量子物質科学プログラム

博士課程前期 入学試験問題

基礎科目

2021年8月26日 13:30～15:00

注意事項

(1) 以下の6枚の用紙が配付されている。

問題用紙 (表紙を含む) 2枚

解答用紙 3枚

下書用紙 1枚

(2) 問題は全部で3問あり, [1], [2], [3] の番号で示してある。

(3) 問題ごとに一枚ずつ別々の解答用紙を用いよ。それぞれの解答用紙の左肩に
問題番号を記入すること。紙面が不足した場合は裏面を用いてよい。

(4) 解答用紙に受験番号を記入せよ。

(5) 試験終了後, 解答用紙を提出すること。問題用紙及び下書用紙は持ち帰ること。

試験科目

基礎科目

- [1] 微分方程式に関する次の問いに答えよ。ただし、 $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$ である。
- (1) 微分方程式 $ay'' + by' + cy = 0$ の解の定性的ふるまいが、 b^2 と $4ac$ の大小関係により異なることを示せ。ただし、 a, b, c は実定数であり、 $a \neq 0$ とする。
- (2) 微分方程式 $y''' + y = 0$ の一般解を求めよ。ただし、 y は実数とする。
- [2] (1) 対角化可能な n 次正方行列 A について、次の問いに答えよ。 n 次の単位行列を I とする。
- (a) $A^2 = I$ が成り立つとき、 A の固有値が ± 1 以外の値をとらないことを証明せよ。
- (b) $n = 2$ のとき、命題「 $A^2 = I$ であれば $A = \pm I$ が成り立つ。」を否定する具体的な反例を三つ記せ。ただし、 A の行列要素は全て実数とし、 $A = \bar{A}$ と $A = -\bar{A}$ が反例であるとき、これらは反例としては同じものとみなす。また、反例の行列は、パラメーターを含まない具体的な形で示せ。
- (2) 2×2 行列 $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルの組を全て求めよ。固有ベクトルの規格化は不要とする。
- [3] 直交直線座標系 $O-xyz$ において、 x, y, z 軸の正の向き単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ とし、 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r = |\mathbf{r}|$ とする。ベクトル場 $\mathbf{f} = x^2z\mathbf{i} + 2y^3z\mathbf{j} + 4xyz^2\mathbf{k}$ を定義する。次の問いに答えよ。
- (1) $r \neq 0$ のとき、 $\nabla(\log r)$ を求めよ。 \log は自然対数とする。
- (2) ベクトル場 \mathbf{f} は点 $(c, -1, 1)$ で $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$ を満たす。定数 c を求めよ。
- (3) 六つの平面 $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2, z = 0, z = 3$ で囲まれた立体の表面を S とする。面積分

$$\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS$$

を求めよ。 \mathbf{n} は外向きの法線単位ベクトルである。