

2021年10月入学及び2022年4月入学
広島大学大学院先進理工系科学研究科（博士課程前期） 入学試験問題

物理学プログラム
量子物質科学プログラム（物理学分野）

専門科目

2021年8月26日 9:00 ~ 12:00

注 意 事 項

1. 以下の用紙が配布されている。

| | |
|--------------|----|
| 問題用紙（本表紙を含む） | 7枚 |
| 解答用紙 | 4枚 |
| 下書き用紙 | 1枚 |
2. 問題は [I] ~ [IV] の4問である。全ての問題に解答せよ。
3. 問題ごとにそれぞれの解答用紙に解答せよ。解答方法が特に指定されている場合を除き、最終的な答えだけでなく、解答に至った考え方や途中計算も示せ。紙面が不足した場合は、表面に「裏面に続く」と明記し、裏面に記入せよ。
4. 解答用紙及び下書き用紙の全てに受験番号を記入せよ。
5. 試験終了時には、全ての解答用紙及び下書き用紙を提出せよ。

[I] 力学

図1のような x 方向にだけ滑らかに並進移動できる振り付台車が水平な滑らかな面に置かれている。長さ ℓ の一様な棒(質量 m)からなる振子が、台車(質量 M)の支点 O に取り付けられて、 x - y 面内で自由に回転できるものとする。

この台車の重心の座標 x 、速度 \dot{x} 、加速度 \ddot{x} 、振子の回転角 θ 、回転角速度 $\dot{\theta}$ 、角加速度 $\ddot{\theta}$ とし、重力加速度を g 、時間を t とする。以下の問いに答えよ。

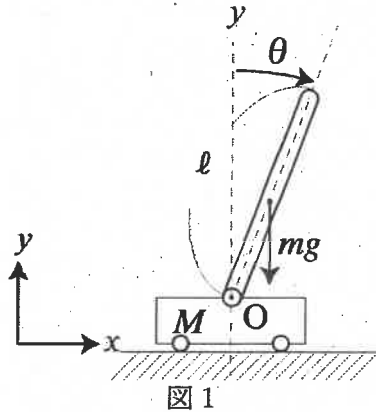


図1

- (1) 一様で長さ ℓ 、質量 m の棒の重心のまわりの慣性モーメント I が $I = \frac{m}{12}\ell^2$ となることを示せ。
- (2) 図1の振り付台車の運動エネルギー E_K を x , \dot{x} , \ddot{x} , θ , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, M , m , ℓ の中から必要な物理量を用いて示せ。
- (3) 図1の振り付台車の位置エネルギー E_P を x , \dot{x} , \ddot{x} , θ , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, M , m , ℓ , g の中から必要な物理量を用いて示せ。
- (4) x , \dot{x} , \ddot{x} , θ , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, M , m , ℓ , g の中から必要な物理量を用いて、図1の振り付台車のラグランジアン L を示せ。
- (5) 図1の振り付台車に、 x 軸方向に外力 F を作用させた。そのときのラグランジュの運動方程式を示せ。
- (6) 問(5)で求めた運動方程式は、 x , θ に対して非線形である。そこで、振り子の角度 θ が十分に小さい釣り合いの位置にある場合を考え、線形化をすることで、 $\ddot{\theta}$ と F の関係を x , \dot{x} , \ddot{x} 以外の物理量を使い示せ。
- (7) 振子を鉛直から θ だけ傾けると、振子は、 θ が増大する方向に運動する。そこで、外力 F を加えて台車を加速し、倒れないようにしたい。どのような外力 F を加えればよいか。問(6)の結果に基づいて論ぜよ。

[II] 電磁気学

図 1a のように真空中に無限に広い導体平板が $z = 0$ 平面に置かれており、 z 軸上で導体平板から $a (a > 0)$ 離れた点 A に点電荷 q が置かれている。このとき、 $z > 0$ のポテンシャル ϕ_V は、図 1b のように導体平板に対する A の対称点に点電荷 q' を置いたとして、 q と q' によるポテンシャルの合成で表される。以下の問いに答えよ。以下では円柱座標系 (r, θ, z) を考え、SI 単位系における真空の誘電率を ϵ_0 とする。

- (1) $z > 0$ における電場 $E_V(r, \theta, z)$ を求めよ。
- (2) 導体表面でポテンシャルがゼロとなることより、 q' はいくらになるか。また、導体平板に誘起される電荷密度 $\sigma(r, \theta)$ を求めよ。
- (3) 導体平板上に誘起される総電荷量 q_t を、 σ を積分することにより求めよ。
- (4) 導体平板に誘起される電荷密度 σ により点 A に作られる電場を、 σ の寄与を積分することにより求めよ。
- (5) 点電荷 q を A から、 z 方向に無限遠までゆっくり引き離す。このときに要する仕事を求めよ。

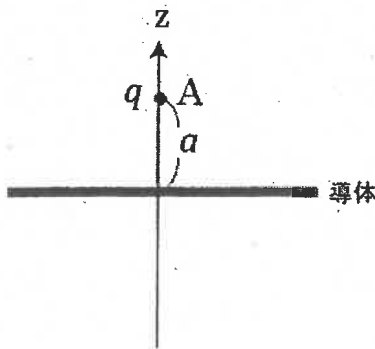


図 1a

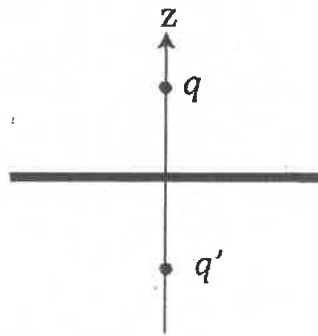
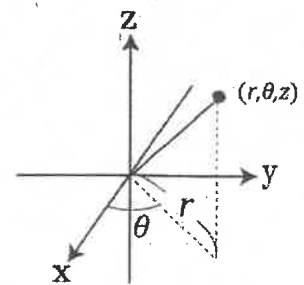


図 1b



[II] 電磁気学 (つづき)

次に、図 2a のように導体平板の代わりに、 $z < 0$ の領域が誘電率 ϵ の誘電体で満たされているとする。このとき、以下の問いに答えよ。

(6) 点 A に点電荷 Q を置いたとき、真空中のポテンシャル ϕ_V は、図 2b のように導体平板と同様に Q と Q' の合成で表され、誘電体中でのポテンシャル ϕ_D は図 2c のように A に電荷 Q'' があると表されるとする。このとき、真空中の電場 $E_V(r, \theta, z)$ 、誘電体中での電場 $E_D(r, \theta, z)$ を求めよ。

(7) 真空と誘電体の界面の境界条件を、 E_V, E_D の成分と ϵ_0, ϵ を用いて表せ。

(8) 問(7)の条件より、 Q' と Q'' を Q, ϵ_0, ϵ を用いて表せ。

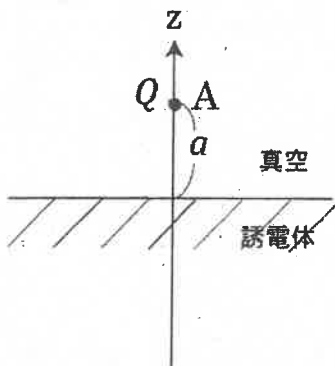


図 2a

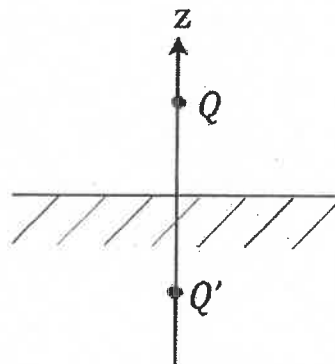


図 2b

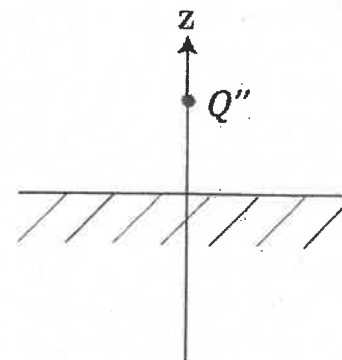


図 2c

[III] 量子力学

3次元角運動量演算子 \hat{L} の x, y, z 成分を、それぞれ $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ と書き、プランク定数を 2π で割ったものを $\hbar = h/(2\pi)$ と書く。このとき、 $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ は交換関係

$$[\hat{L}_a, \hat{L}_b] = \sum_{c \in \{x, y, z\}} i\hbar \epsilon_{abc} \hat{L}_c$$

を満たす。ここで、 ϵ_{abc} は完全反対称テンソル ($\epsilon_{xyz} = 1$ で x, y, z の偶置換は1, 奇置換は -1 , その他は0) である。以下の問いに答えよ。

角運動演算子の z 方向成分 \hat{L}_z と演算子 $\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ (複合同順) に対して、以下の交換関係を求めよ。

(1) $[\hat{L}_z, \hat{L}_+]$

(2) $[\hat{L}_z, \hat{L}_-]$

演算子 \hat{L}^2 と \hat{L}_z の同時固有状態 $|u_{\lambda, \mu}\rangle$ を考える。

$$\hat{L}^2 |u_{\lambda, \mu}\rangle = \lambda |u_{\lambda, \mu}\rangle$$

$$\hat{L}_z |u_{\lambda, \mu}\rangle = \mu |u_{\lambda, \mu}\rangle$$

それぞれの演算子に対する固有値を λ, μ と書いた。また、状態 $|u_{\lambda, \mu}\rangle$ に演算子 \hat{L}_{\pm} を作用させた状態を、それぞれ、

$$|v\rangle = \hat{L}_+ |u_{\lambda, \mu}\rangle$$

$$|w\rangle = \hat{L}_- |u_{\lambda, \mu}\rangle$$

と書く。

(3) 状態 $|v\rangle$ と $|w\rangle$ に対する、演算子 \hat{L}^2 と \hat{L}_z の固有値を、それぞれ求めよ。

(4) $\langle u_{\lambda, \mu} | u_{\lambda, \mu} \rangle \geq 0$, $\langle v | v \rangle \geq 0$ と $\langle w | w \rangle \geq 0$ から、 \hat{L}_z の固有値に対する下限と上限を、 \hat{L}^2 の固有値 λ と \hbar で表せ。

(5) \hat{L}^2 の固有値が同じになる \hat{L}_z に対する状態の数 (縮退度) はいくつか。 \hat{L}^2 の固有値 λ と \hbar で表せ。

(6) ユニタリ演算子 $\hat{U} = \exp(-i2\pi\hat{L}_z/\hbar)$ で状態 $|u_{\lambda, \mu}\rangle$ は、 $\hat{U} |u_{\lambda, \mu}\rangle$ と変換する。 \hat{L}_z に対する縮退度が2となる時、変換後の状態 $\hat{U} |u_{\lambda, \mu}\rangle$ を変換前の状態 $|u_{\lambda, \mu}\rangle$ を用いて表せ。

[IV] 熱統計力学

断熱壁で囲まれた立方体に閉じ込められた、スピン自由度のある理想的な古典 N 粒子系を考える。立方体の一辺の長さは L であり、その体積は $V = L^3$ である。図1のように、立方体の x 方向の中央 $x = 0$ に、粒子が自由に通過できる仕切り板が yz 平面に平行に設置されている。これに対応して、立方体の $x \geq 0$ の部分にだけ一様な磁場をかけることができるとする。つまり、系全体での磁場 $B(x) = (0, 0, B_z(x))$ は、

$$B_z(x) = B\theta(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ B & (x \geq 0) \end{cases}$$

である。 $\theta(x)$ は階段関数で、 $B \geq 0$ は磁場を表すパラメータである。

この粒子系のハミルトニアンは、

$$H(\{r_i\}, \{p_i\}, \{\sigma_i\}) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m} - \sigma_i \mu B_z(x_i) \right)$$

であるとする。 r_i, p_i はそれぞれ i 番目粒子の位置と運動量であり、 m は粒子の質量である。また $\sigma_i = \pm 1$ はスピン自由度で、正の定数 μ はボア磁子と呼ばれるものである。(μ は化学ポテンシャルではない。)

このとき、以下の問いに答えよ。ただし、ボルツマン因子を k 、プランク定数を h とせよ。また、系は熱平衡状態でカノニカル分布に従うものとする。

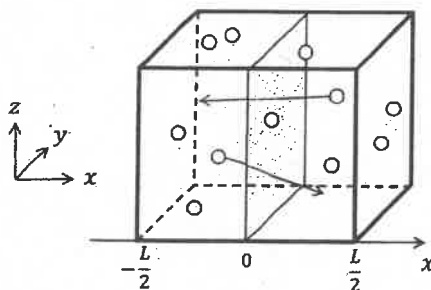


図1

- (1) 系が温度 T の平衡状態にあるときの分配関数 $Z(T, B)$ を求めよ。積分公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を用いてよい。
- (2) 系が温度 T の平衡状態にあるときのエントロピー $S(T, B)$ を求めよ。スターリングの公式 $\ln N! \approx N \ln N - N$ を用いてよい。
- (3) 系が温度 T の平衡状態にあるときの粒子数密度分布 $\rho(r) = \langle \sum_{i=1}^N \delta(r - r_i) \rangle$ を求めよ。ここで、 $\langle \dots \rangle$ は温度 T 、磁場 B におけるカノニカル分布での統計平均であり、 $\delta(r) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ である。また、得られた結果において、系全体にわたる空間積分が $N = \int_V d^3r \rho(r)$ を満たすことを確かめよ。

[IV] 熱統計力学 (つづき)

(4) 系が温度 T の平衡状態にあるときの磁化密度分布 $M_z(\mathbf{r}) = \langle \mu \sum_{i=1}^N \sigma_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \rangle$ を求めよ。また、全磁化 $M_z(T, B) = \int_V d^3r M_z(\mathbf{r})$ を求めよ。

(5) $\mu B/(kT) \ll 1$ のときに、磁場 B の値を少しだけ変化させることを考える。初期平衡状態で B だった磁場を $B \rightarrow B + \delta B$ に微小変化させ、十分に時間がたった後に熱平衡状態になるとする。このとき、系の断熱性から温度が変化する。温度変化を $\delta T = a \delta B$ のように δB の一次までで考えるとき、係数 a を $\mu B/(kT)$ について一次までで求めよ。磁場が小さくなるように $\delta B < 0$ と設定するとき、温度は「上がる」か「下がる」かを答えよ。

(6) $\mu B/(kT) \gg 1$ のときに、磁場 B の値を大きく変化させることを考える。初期平衡状態で $B = \infty$ だった磁場を $B \rightarrow 0$ に変化させ、十分に時間がたった後に熱平衡状態になるとする。このとき、系の断熱性から温度が変化する。温度変化 ΔT を求め、温度は「上がる」か「下がる」かを答えよ。

(7) 問(6)において、粒子数密度分布 $\rho(\mathbf{r})$ も変化する。 $B = \infty$ の平衡状態のときの分布と $B = 0$ の平衡状態になったときの分布の概形について、問(3)の結果に基づいて、それぞれ適切なものを図2から選べ。

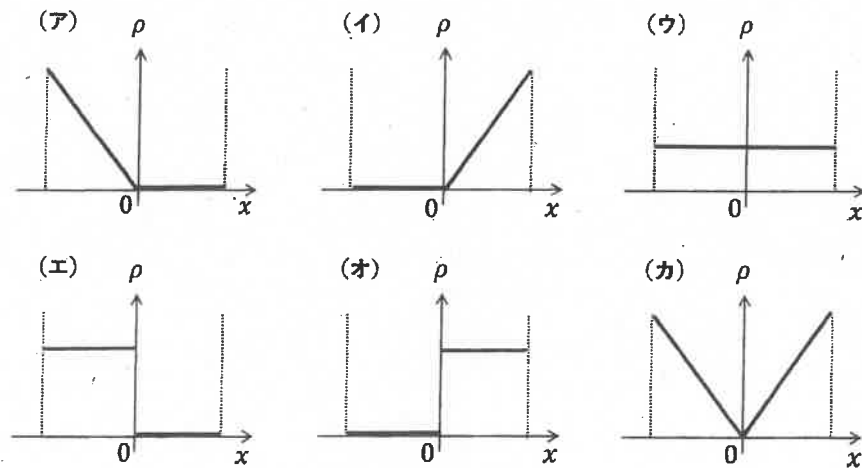


図2