# 広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

| 数 学 プログラム | 専門科目 | 受験番号 | M |
|---|---|---|---|

令和2年　1月　24日　　　　9：00　～　12：00

## 注 意 事 項

1．以下の用紙が配布されている．

| | |
|---|---|
| 問題用紙（表紙を含む） | 4　枚 |
| 解答用紙 | 3　枚 |
| 下書き用紙 | 3　枚 |

2．問題は全部で　3　問ある．

3．問題ごとに必ず一枚ずつ別々の解答用紙を用い，それぞれの解答用紙に問題番号を記入して解答せよ．紙面が不足した場合は裏面を使用してよい．

4．試験問題の表紙，解答用紙，および下書き用紙のすべてに受験番号を記入せよ．

5．試験終了時には，すべての解答用紙および下書き用紙を提出すること．

# 広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

| 数 学 プログラム | 専門科目 | 令和２年１月実施 |
| --- | --- | --- |

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ．

[ 1 ] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) 以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}^3$ におけるベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ a-2 \\ 1+b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3-b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ a-1 \\ 3 \end{pmatrix}$ が一次従属になるために $a, b \in \mathbb{R}$ が満たすべき条件を求めよ．

(2) $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で張られる $\mathbb{R}^4$ の部分空間を $W$ とする．$W$ の $\mathbb{R}^4$ の標準内積に関する直交補空間 $W^{\perp}$ の正規直交基底を一組求めよ．

(B) 行列 $A$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

により定めるとき，次の問に答えよ．

(1) $A$ の固有値を求めよ．

(2) $A$ は対角化可能か否かを理由とともに答えよ．

(3) $A$ のジョルダン標準形 $J$ と，$P^{-1}AP = J$ となるような正則行列 $P$ を一つ求めよ．

(4) $A^n$ の第 $(2, 2)$ 成分を求めよ．

# 広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

| 数 学 プログラム | 専門科目 | 令和２年１月実施 |
|---|---|---|

**[ 2 ]** 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) $\mathbb{R}^2$ 上の実数値連続関数 $f(x,y)$ が $\displaystyle\lim_{|x|+|y|\to\infty} f(x,y) = \infty$ を満たすとする．以下の問に答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{|x|+|y|\to\infty} f(x,y) = \infty$ となることの定義を述べよ．また，関数 $f(x,y)$ が最小値をもつことの定義を述べよ.

(2) $R > 0$ が存在して $|x| + |y| > R$ のとき $f(x,y) > f(0,0)$ となることを示せ.

(3) 関数 $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ において最小値をもつことを示せ.

(B) 以下の問に答えよ.

(1) $f(x) = \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ がマクローリン級数展開可能であることを示し，総和記号を用いてマクローリン級数展開を与えよ．ただし，関数 $f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上 $C^\infty$ 級であることは証明なしに用いてもよい.

(2) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して不等式

$$0 \leq x^2 - \sin(x^2) \leq \frac{x^6}{6}$$

が成り立つことを示せ.

(3) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $g(x,y)$ が $(x,y) = (x_0, y_0)$ において全微分可能であることの定義を述べよ.

(4) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $h(x,y)$ を

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{x^2 + y^2} & ((x,y) \neq (0,0)), \\ 1 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

により定義するとき，$h(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ において全微分可能であることを示せ.

# 広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

| 数 学 プログラム | 専門科目 | 令和２年１月実施 |
|---|---|---|

[ **3** ] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) $a, b$ を正の実数とする. $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\},$$
$$\rho(x, y) = a|x_1 - y_1| + b|x_2 - y_2|$$

と定める. 以下の問に答えよ.

(1) $d$ と $\rho$ は $\mathbb{R}^2$ 上の距離であることを示せ.

(2) $A \subset \mathbb{R}^2$ が距離 $d$ に関して開集合であることの定義を述べよ.

(3) 距離 $d$ に関する開集合と距離 $\rho$ に関する開集合は一致することを示せ.

(B) 実数の集合 $\mathbb{R}$ を通常の位相で位相空間とみなし, その位相 (開集合系) を $\mathcal{O}$ と表す. 以下の問に答えよ.

(1) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して, 部分集合系 $\mathcal{O}_f = \{f^{-1}(A) | A \in \mathcal{O}\}$ は集合 $\mathbb{R}$ の位相であることを示せ.

(2) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ で定める. このとき (1) で定めた $\mathbb{R}$ 上の位相 $\mathcal{O}_f$ はハウスドルフの分離公理を満たさないことを示せ.

(3) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して, (1) で定めた $\mathbb{R}$ の位相 $\mathcal{O}_f$ が $\mathbb{R}$ の通常の位相 $\mathcal{O}$ に一致するとき, 次を示せ.

(i) $f$ は単射である.

(ii) 任意の開区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対し, $f(I) \subset \mathbb{R}$ は開区間である.