

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目 (午前)
---------------	-----------

受験番号	M
------	---

令和 2年 8月 27日 9 : 0 0 ～ 1 2 : 0 0

注 意 事 項

- 以下の用紙が配布されている。

問題用紙 (表紙を含む)	4 枚
解答用紙	3 枚
下書き用紙	3 枚
- 問題は全部で 3 問ある。
- 問題ごとに必ず一枚ずつ別々の解答用紙を用い、それぞれの解答用紙に問題番号を記入して解答せよ。紙面が不足した場合は裏面を使用してよい。
- 試験問題の表紙、解答用紙、および下書き用紙のすべてに受験番号を記入せよ。
- 試験終了時には、すべての解答用紙および下書き用紙を提出すること。

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム

専門科目 (午前)

令和 2 年 8 月実施

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ.

[1] 次の (A), (B), (C) のすべての問に答えよ.

(A) 次の x, y, z, t に関する連立方程式が解を持つように定数 a の値を定め, その時の一般解を求めよ.

$$\begin{cases} x - y - 6z + 2t = 1 \\ 8x - 7y - 5z - t = 2 \\ 7x - 6y + z - 3t = a \end{cases}$$

(B) 2 次以下の一変数実係数多項式全体のなす集合 $V := \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ を, 通常のとスカラー倍によって実線型空間とみなす. $\varphi \in V$ に対し多項式 $F(\varphi)$ を

$$F(\varphi)(x) := (2x + 3)\varphi(x) - (x^2 + 3x + 2)\frac{d\varphi}{dx}(x)$$

により定義する. 以下の問に答えよ.

(1) F は V から V への実線型写像であることを示せ.

(2) V の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関して F の表現行列を求めよ.

(3) F の固有値と, 各固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(C) m, n を正整数とし, A を $m \times n$ 実行列とする. tA は行列 A の転置行列を表す. また, I_m および I_n は m 次および n 次の単位行列である. 以下の問に答えよ.

(1) n 次正方行列 $I_n + {}^tAA$ は正則行列であることを示せ.

(2) $(m + n)$ 次正方行列

$$M := \left[\begin{array}{c|c} I_m & A \\ \hline -{}^tA & I_n \end{array} \right]$$

は正則行列であることを示せ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム

専門科目 (午前)

令和 2 年 8 月実施

[2] 次の (A), (B), (C) のすべての問に答えよ.

(A) 以下の問に答えよ. ただし $[0, 1) := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ である.

(1) 任意の実数 $t \in [0, 1)$ および正整数 m に対し,

$$\frac{t}{1-t^2} = \sum_{n=1}^m t^{2n-1} + \frac{t^{2m+1}}{1-t^2}$$

が成立することを示せ.

(2) $t \in [0, 1)$ および正整数 m に対し,

$$f_m(t) := \sum_{n=1}^m \frac{t^{2n}}{n}$$

とし, $a \in [0, 1)$ とする. 関数列 $(f_m)_{m=1,2,\dots}$ は閉区間 $[0, a]$ 上で関数

$$g(t) := -\log(1-t^2)$$

に一様収束することを示せ.

(B) p を $0 < p < 1$ を満たす実数とする. 开区間 $(0, 1)$ 上の関数

$$g_p(x) := x^{p-1}(1-x)^{p-1}$$

について, 以下の問に答えよ.

(1) 広義積分 $\int_0^1 g_p(x) dx$ は収束することを示せ.

(2) $p = 1/2$ のときの広義積分 $\int_0^1 g_{1/2}(x) dx$ の値を求めよ.

(C) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) := e^{x+y}(x^2 + xy + y + 1)$$

により定める. 以下の問に答えよ.

(1) $x = 0$ の $\mathbb{R}$ におけるある近傍で定義された微分可能な関数 $\varphi(x)$ で, $\varphi(0) = 0$ かつ $f(x, \varphi(x)) = 1$ を満たすものが存在することを示せ.

(2) (1) で与えられた関数 $\varphi(x)$ の $x = 0$ における微分係数 $\varphi'(0)$ を求めよ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目 (午前)	令和 2 年 8 月実施
---------------	-----------	--------------

[3] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) $\mathbb{R}$ を通常の位相で位相空間とみなす. $\mathbb{R}$ の部分集合

$$A := \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}, n > 0 \right\}$$

を考える. $\mathbb{R}$ 上の関係 $\sim$ を

$$x \sim y \iff (x = y \text{ または } (|x| = |y| \text{ かつ } |x| \in A))$$

により定める. 以下の問に答えよ.

- (1) 関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ.
- (2) $\mathbb{R}$ における A の閉包 $\overline{A}$ を求めよ.
- (3) 商空間 $\mathbb{R}/\sim$ はハウスドルフ空間か否かを判定し, 理由とともに述べよ.

(B) (X, d) を距離空間とする. X の空でない部分集合 A に対し, 関数 $g_A: X \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$g_A(x) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$$

により定める. 以下の問に答えよ.

- (1) 関数 $g_A: X \rightarrow \mathbb{R}$ は連続であることを示せ.
- (2) A は X の空でない閉部分集合であるとする. $x \in X$ が $g_A(x) = 0$ を満たすならば $x \in A$ を満たすことを示せ.
- (3) A, B はともに X の空でない閉部分集合であり $A \cap B = \emptyset$ を満たすとする. このとき, 関数 g_A および g_B を用いて, 次を満たす連続関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ を構成せよ.

$$0 < f(x) < 1 \quad (x \in X \setminus (A \cup B)), \quad f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in B) \end{cases}$$