

# 広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

|               |         |
|---------------|---------|
| 数 学 プ ロ グ ラ ム | 留学生特別選抜 |
|---------------|---------|

|      |   |
|------|---|
| 受験番号 | M |
|------|---|

令和 3年 1月 29日                      9 : 0 0   ~   1 2 : 0 0

## 注 意 事 項

1. 以下の用紙が配布されている.

|              |     |
|--------------|-----|
| 問題用紙 (表紙を含む) | 5 枚 |
| 解答用紙         | 4 枚 |
| 下書き用紙        | 3 枚 |

2. 問題は全部で 4 問ある.

3. 問題ごとに必ず一枚ずつ別々の解答用紙を用い, それぞれの解答用紙に問題番号を記入して解答せよ. 紙面が不足した場合は裏面を使用してよい.

4. 試験問題の表紙, 解答用紙, および下書き用紙のすべてに受験番号を記入せよ.

5. 試験終了時には, すべての解答用紙および下書き用紙を提出すること.

# 広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム

留学生特別選抜

令和 3 年 1 月実施

次の [1], [2], [3], [4] の全問に解答せよ。

[ 1 ] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ。

(A) 行列

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

を考える。以下の問に答えよ。

- (1)  $A$  の固有多項式を求めよ。
- (2)  $A$  の固有値と、各固有値に対する固有ベクトルを求めよ。
- (3)  $J := P^{-1}AP$  がジョルダン標準形となる正則行列  $P$  と、そのジョルダン標準形  $J$  を求めよ。

(B) 以下において、 $i$  は虚数単位 ( $i^2 = -1$ ) を表す。また  $n$  は正整数である。複素数  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  (ただし  $a, b \in \mathbb{R}$ ) に対し、その複素共役  $a - ib$  を  $\bar{z}$  と書く。複素数を成分とするベクトル  $v = p + iq \in \mathbb{C}^n$  (ただし  $p, q \in \mathbb{R}^n$ ) に対し、各成分の複素共役をとって得られるベクトル  $p - iq \in \mathbb{C}^n$  を  $\bar{v}$  と書く。以下の問に答えよ。ただし、複素共役が  $\mathbb{C}$  における四則演算を保存すること、つまり  $z, w \in \mathbb{C}$  に対し

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \quad \overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w} \quad (\text{ただし } w \neq 0)$$

が成立することは証明なしに用いてもよい。

- (1)  $A$  を  $n \times n$  実行列とする。  $\lambda \in \mathbb{C}$  が  $A$  の固有値であり、  $v \in \mathbb{C}^n$  をその固有ベクトルとする。このとき、  $\bar{\lambda}$  も  $A$  の固有値であり、  $\bar{v}$  がその固有ベクトルであることを示せ。
- (2)  $A$  を  $2 \times 2$  実行列とする。  $\lambda = a + ib$  (ただし  $a, b \in \mathbb{R}$ ) は  $A$  の固有値であり、  $v = p + iq \in \mathbb{C}^2$  (ただし  $p, q \in \mathbb{R}^2$ ) はその固有ベクトルであるとする。  $b \neq 0$  ならば  $p, q$  は実線形空間  $\mathbb{R}^2$  において線形独立であることを示せ。
- (3)  $A, \lambda = a + ib, v = p + iq$  は (2) と同じであるとする。実線形変換  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $x \mapsto Ax$  で定める。  $b \neq 0$  ならば、  $\mathbb{R}^2$  の適当な基底をとって線形変換  $f$  は行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

により表現されることを示せ。

# 広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム

留学生特別選抜

令和 3 年 1 月実施

[ 2 ] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) (1) 定積分

$$\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dx}{\sin x}$$

の値を求めよ.

(2)  $a > 0, b > 0$  とする. 定積分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a \cos^2 x + b \sin^2 x}$$

の値を求めよ.

(B)  $x \in \mathbb{R}$  に対し  $\Lambda(x) = \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$  とし,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda(2^k x)}{3^k}$$

とする. 以下の問に答えよ.

(1) 任意の  $x, y \in \mathbb{R}$  に対し,

$$|\Lambda(x) - \Lambda(y)| \leq |x - y|$$

が成立することを示せ.

(2) 任意の  $x, y \in \mathbb{R}$  に対し,

$$|f(x) - f(y)| \leq 3|x - y|$$

が成立することを示せ.

(3)  $\alpha$  は無理数で  $0 < \alpha < 1$  とし, その 2 進数表示を  $0.a_1a_2a_3\cdots$  とする. すなわち,

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}, \quad a_n \in \{0, 1\}$$

が成立しているとする. このとき,  $f(x)$  は  $x = \alpha$  で微分可能であり, 微分係数  $f'(\alpha)$  は

$$\beta = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{a_{k+1}} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

と等しいことを示せ.

# 広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム

留学生特別選抜

令和 3 年 1 月実施

[ 3 ]  $X$  を位相空間とする.  $X$  上に二項関係  $\sim$  を

$$x \sim y \iff \begin{array}{l} X = U \cup V \text{ かつ } U \cap V = \emptyset \text{ かつ } x \in U \text{ かつ } y \in V \text{ をみた} \\ \text{す } X \text{ の開集合 } U, V \text{ は存在しない,} \end{array}$$

で定義する. 以下の問に答えよ.

- (1)  $\sim$  は同値関係であることを示せ.
- (2)  $C$  は  $X$  の連結部分空間であるとする. このとき, 任意の  $x, y \in C$  に対し,  $x \sim y$  が成立することを示せ.
- (3) 平面  $\mathbb{R}^2$  を通常のユークリッド距離により位相空間とみなす. 2 以上の整数  $n$  に対し,  $R_n$  を平面  $\mathbb{R}^2$  上の原点を中心とする半径  $1 - 1/n$  の円周とする. 平面  $\mathbb{R}^2$  の部分空間  $W$  を

$$W := \{(1, 0), (0, 1)\} \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} R_n$$

により定義する.  $W$  において  $(1, 0) \sim (0, 1)$  が成り立つことを示せ.

以下, 点  $x \in X$  を含む  $\sim$  についての同値類を  $[x]$  と書く. また,  $X$  の部分集合で閉かつ開であるものを閉開集合と呼ぶ.

- (4)  $[x]$  は  $x$  を含むすべての閉開集合の共通部分であることを示せ.
- (5)  $W$  を (3) で定義された  $\mathbb{R}^2$  の部分空間とする.  $W$  における  $\sim$  についての同値類  $[(1, 0)]$  は連結か? 理由とともに述べよ.

# 広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

|               |         |              |
|---------------|---------|--------------|
| 数 学 プ ロ グ ラ ム | 留学生特別選抜 | 令和 3 年 1 月実施 |
|---------------|---------|--------------|

[ 4 ] 関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が  $a \in \mathbb{R}$  において連続であるということの  $\varepsilon$ - $\delta$  論法による定義を英文で記せ.  
ただし, 全称記号  $\forall$  と存在記号  $\exists$  は使ってはならない.