

# 広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

|               |           |
|---------------|-----------|
| 数 学 プ ロ グ ラ ム | 専門科目 (午前) |
|---------------|-----------|

|      |   |
|------|---|
| 受験番号 | M |
|------|---|

令和3年 8月 26日 9:00 ~ 12:00

## 注 意 事 項

1. 以下の用紙が配布されている.

|              |     |
|--------------|-----|
| 問題用紙 (表紙を含む) | 5 枚 |
| 解答用紙         | 3 枚 |
| 下書き用紙        | 3 枚 |

2. 問題は全部で 3 問ある.

3. 問 [3] では, (I) か (II) かいずれかの問題を選んで解答せよ.

4. 問題ごとに必ず一枚ずつ別々の解答用紙を用い, それぞれの解答用紙に問題番号を記入して解答せよ. 紙面が不足した場合は裏面を使用してよい.

5. 試験問題の表紙, 解答用紙, および下書き用紙のすべてに受験番号を記入せよ.

6. 試験終了時には, すべての解答用紙および下書き用紙を提出すること.

# 広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

|               |           |               |
|---------------|-----------|---------------|
| 数 学 プ ロ グ ラ ム | 専門科目 (午前) | 令和 3 年 8 月 実施 |
|---------------|-----------|---------------|

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ.

[ 1 ] 次の (A), (B), (C) のすべての問に答えよ.

(A) 以下の問に答えよ.

(1) 逆行列を使って, 連立方程式 
$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 \\ -x + y + 4z = 1 \\ 5y + 2z = 1 \end{cases}$$
 の解を求めよ.

(2) 行列 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$
 の行列式および逆行列を求めよ.

(B) 線形空間の元  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  が与えられたとき, それらの張る部分空間を  $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$  と書くものとする.  $\mathbb{R}^3$  の元  $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  に対して,  $V := \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle$ ,  $W := \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \rangle$  とおく. 以下の問に答えよ.

(1)  $V + W := \{\mathbf{v} + \mathbf{w} \mid \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W\}$  の次元を求めよ.

(2)  $V \cap W$  の基底を一組求めよ.

(C)  $V$  を実線形空間とし,  $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  を  $V$  上の内積とする.  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  を  $V$  の元として, 写像

$$f: V \rightarrow \mathbb{R}^k; \mathbf{v} \mapsto (b(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}), \dots, b(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}))$$

を考える. 以下の問に答えよ.

(1)  $V$  が  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  で張られるとき,  $f$  は単射であることを示せ.

(2)  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  が  $\mathbb{R}$  上一次独立であるとき,  $f$  は全射であることを示せ.

# 広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

|               |           |               |
|---------------|-----------|---------------|
| 数 学 プ ロ グ ラ ム | 専門科目 (午前) | 令和 3 年 8 月 実施 |
|---------------|-----------|---------------|

[ 2 ] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ。

(A)  $0 < p < q < 1$  とし,  $\mathbb{R}^2$  上の関数  $f(x, y) = px^2 + qy^2 + e^{-(x^2+y^2)}$  を考える。以下の問に答えよ。

- (1)  $f(x, y)$  の  $x$  についての偏導関数  $f_x(x, y)$  と,  $y$  についての偏導関数  $f_y(x, y)$  を計算せよ。
- (2)  $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$  となる点  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  をすべて求めよ。
- (3)  $f(x, y)$  のすべての極値を求めよ。
- (4)  $f(x, y)$  の最大値と最小値を調べよ。

(B) 以下の問に答えよ。ただし, (1), (2) では  $I$  を  $\mathbb{R}$  の区間とする。

- (1)  $f(x)$  を  $I$  上で 2 回微分可能であり  $f(x) > 0$  ( $x \in I$ ) を満たす関数であるとする。このとき,  $g(x) = \log f(x)$  ( $x \in I$ ) の 2 階導関数  $g''(x)$  を計算し,  $f(x), f'(x), f''(x)$  を用いて表せ。
- (2)  $f(x)$  を  $I$  上で 2 回微分可能であり  $f''(x) \geq 0$  ( $x \in I$ ) を満たす関数であるとする。このとき, 次が成立することを示せ。

任意の  $x_1, x_2 \in I$  と任意の  $t \in [0, 1]$  に対して

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

が成立する。

- (3) 次の (i), (ii), (iii) をすべて満たすような閉区間  $[0, 1]$  上の関数  $f(x)$  は存在しないことを示せ。

- (i)  $f(x)$  は  $[0, 1]$  上で 2 回微分可能である。
- (ii)  $f(0) = 0$  かつ  $f(x) > 0$  ( $x \in (0, 1]$ ) を満たす。
- (iii)  $f(x)f''(x) \geq (f'(x))^2$  ( $x \in [0, 1]$ ) を満たす。

# 広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム

専門科目 (午前)

令和 3 年 8 月実施

[ 3 ] 次の (I), (II) のいずれかの間に答えよ. ((II) は次のページにある)

(I) 次の (A), (B) のすべての間に答えよ.

(A) 以下の間に答えよ.

- (1)  $X, Y, Z$  を集合とする. 写像  $f: X \rightarrow Y$  および  $g: Y \rightarrow Z$  について,  $f, g$  が単射であれば  $g \circ f$  も単射であることを示せ.
- (2)  $X, Y, Z$  を集合とする. 写像  $f: X \rightarrow Y$  および  $g: Y \rightarrow Z$  について,  $g \circ f$  が全射であれば  $f$  も全射であると言えるか. 理由とともに答えよ.
- (3)  $X$  と  $Y$  を位相空間として, 連続な全射  $f: X \rightarrow Y$  が存在するものとする.  $X$  が連結であるとき,  $Y$  も連結であると言えるか. 理由とともに答えよ.

(B) 以下の間に答えよ. ただし,  $\mathbb{R}$  は通常の位相により位相空間と考え, また  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  には  $\mathbb{R}$  の部分空間としての位相を与えるものとする.

- (1)  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}; a \mapsto [a - \sqrt{2}]$  は連続であるかどうか判定せよ. ただし, 実数  $r$  に対して  $[r]$  は  $r$  を超えない最大の整数である.
- (2)  $\mathbb{Q}$  の空でない開集合は無限個の元を持つことを示せ.
- (3) 連続な単射  $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$  は存在しないことを証明せよ.

(II) 次の (A), (B) のすべての問に答えよ。

(A) 以下の問に答えよ。

- (1) コインを  $n$  回投げたときに表の出る回数を  $S_n$  とする。  $n \geq 10^4$  ならば、

$$\left| \frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \right| \geq 0.05$$

となる確率は 0.01 以下であることを示せ。ただし、コインの裏表の出方は同様に確からしいとする。

- (2) ウイルス性の感染症  $V$  に対する検査  $T$  がある。 $V$  の感染者のうちの  $a\%$  が  $T$  で正しく陽性を示す。一方、 $V$  の非感染者のうちの  $b\%$  が誤って  $T$  で陽性を示す。現在、人口の  $c\%$  が  $V$  に感染している。検査  $T$  で陽性を示した人が、実際に  $V$  に感染している確率を求めよ。

- (B)  $X_1, \dots, X_n$  を互いに独立に同一のパラメータ  $\theta$  ( $\theta > 0$ ) の指数分布に従う確率変数とする。ただし、パラメータ  $\theta$  の指数分布の確率密度関数は

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

である。以下の問に答えよ。

- (1)  $E(X_1) = \theta$  となることを示せ。  
(2)  $\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$  とし、 $\theta$  の最尤推定量を  $\hat{\theta}$  とする。 $\hat{\theta} = \bar{X}$  となることを示せ。  
(3)  $\hat{\theta}$  は  $\theta$  の不偏推定量であることを示せ。  
(4)  $V = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \hat{\theta}$  とおく。 $V^2$  は  $\theta^2$  の不偏推定量であることを示せ。ただし、必要であれば、 $E(X_1^2) = 2\theta^2$  であることは証明なしで用いてよい。