令和元年度１０月入学及び令和２年度４月入学
広島大学大学院理学研究科 入学試験問題

物理科学専攻	専門科目

令和元年 ８月２２日　　13:30 ～ 16:30

注　意　事　項

1. 以下の用紙が配付されている。
   問題用紙（本表紙を含む。）　６枚
   解答用紙　４枚
   下書き用紙　１枚
2. 問題は[I]～[IV]の４問である。全ての問題に解答せよ。ただし，[I]力学については，問題用紙が２枚あることに注意せよ。
3. 問題ごとにそれぞれの解答用紙に解答せよ。解答方法が特に指定されている場合を除き，最終的な答えだけでなく，解答に至った考え方や途中計算も示せ。紙面が不足した場合は，表面に「裏面に続く」と明記し，裏面に記入せよ。
4. 解答用紙及び下書き用紙の全てに受験番号を記入せよ。
5. 試験終了時には，全ての解答用紙及び下書き用紙を提出せよ。

［I］力学

振り子の運動に関する以下の設問に答えよ。振り子は図１に示すようなXY平面内で運動するものとし，長さρの伸び縮みしない棒の片側が点Pに固定されており，もう一方の先端に質量mの質点が取り付けられている。棒の質量は無視できるものとする。重力は鉛直下向き（$-Y$方向）に働くものとし，重力加速度はgとする。空気の抵抗や固定点での摩擦は無視できるものとする。

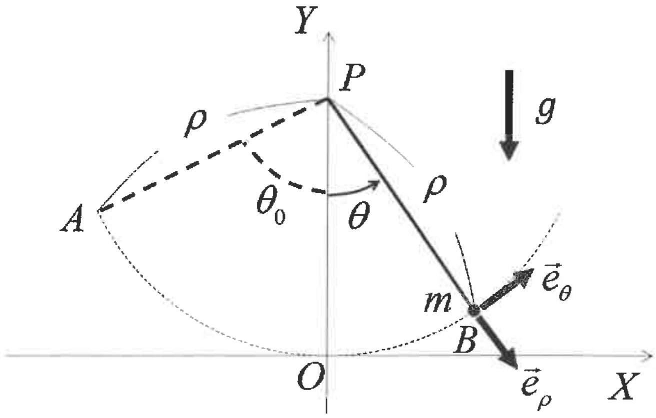

図１

振り子の運動を，点Pを中心とする半径ρの円弧の上の質点の運動として考えてみよう。質点は初期に点A（振り子の傾きθ_0の位置）にあり静止状態から動き始めたとする。この問題を取り扱うために，円弧上を質点とともに動く座標系を導入する。振り子の棒の方向をρ方向，円弧に沿った方向をθ方向とし，図１に示すようにそれぞれの方向の単位ベクトルを$\vec{e}_\rho$，$\vec{e}_\theta$とする。

（１）単位ベクトル$\vec{e}_\rho$，$\vec{e}_\theta$それぞれのデカルト座標系における成分，すなわち図１に示すX方向，Y方向の成分をθの関数として書け。

（２）質点の点Bにおける速度ベクトルを$\vec{v}_\theta$とするとその時間微分が

$$\frac{d\vec{v}_\theta}{dt} = \rho\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \rho\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho$$

と書けることを示せ。ここで，$\dot{\theta}$，$\ddot{\theta}$はそれぞれ，θの時間に関する一階微分，二階微分を表す。なお本設問に解答できなかった場合でも，この式を用いて以降の設問を解き進んでよい。

（次のページに続く）

（３）質点に作用する棒の張力をTとして，質点の運動方程式を単位ベクトル$\vec{e}_\rho$ ，$\vec{e}_\theta$を含む形で書け。

（４）設問（３）で得た運動方程式からこの系のエネルギー保存則を表す式を導出せよ。

（５）設問（３）で得た運動方程式から張力Tを傾きθの関数として導出せよ。また，張力Tが最大となる場合とゼロとなる場合の傾きθをそれぞれ求めよ。

次に，図１の振り子の問題を解析力学の手法で取り扱ってみよう。なお，これまでの設問とは異なり振り子は初期に点Oからある初速度で動き始めたとし，点Pを中心とする振り子の反時計回りの回転角をθとし，一般座標とする。また，質点の位置エネルギーは質点が点Oにあるときをゼロとする。

（６）図１の振り子の運動に関するラグランジアンを，θを用いて書け。

（７）一般座標θに共役な運動量p_θを求めよ。それはどのような物理量に対応しているか簡潔に説明せよ。

（８）図１の振り子の運動を記述するハミルトニアンを書き，これが時間に陽に依存しないことを示せ。このような場合，ハミルトニアンは一定値をとる。これを定数Eとおき，θとp_θの関係式を示せ。

（９）座標と運動量で張られる空間は位相空間（一次元問題の場合には位相平面）と呼ばれる。設問（８）の結果において，一般座標θの絶対値が十分に小さい（$|\theta| \ll 1$）としてθの二次の項まで残し，振り子の運動がθとp_θの関係として位相平面上でどのような図形として描かれるか，簡単な図を用いて説明せよ。なお図は数値的に正確である必要はない。

（１０）設問（８）の結果において，θが小さくない一般の場合を考えよう。この場合にθが取りうる値の範囲をEの関数として示せ。また，Eがある値を超えるとθが任意の値を取りうることを示し，また，それが振り子のどのような運動に対応するか，簡潔に説明せよ。さらに，この場合の振り子の運動の様子を位相空間上の図として簡単に示せ。なお図は数値的に正確である必要はない。

[II] 電磁気学

図１のような，静電容量 C のコンデンサー，抵抗値 R の抵抗，スイッチからなる回路を考える。スイッチが開いた状態でコンデンサーに電荷 Q_0 を与え，時刻 $t=0$ でスイッチを閉じた。

(1)　コンデンサーは一辺 L の正方形の金属板２枚からなる平行平板コンデンサーで，金属板間の距離は d $(d \ll L)$ とする。このとき C を L と d を用いて表せ。ただし，回路は真空中にあるものとし，真空の誘電率 ε_0 を用いること。

(2)　コンデンサーに蓄えられている電荷を時間 t の関数 $Q(t)$ とする。$Q(t)$を，Q_0，t, C, R を用いて表せ。

(3)　スイッチが閉じられる直前にコンデンサーに蓄えられていた静電エネルギーとスイッチを閉じた後に抵抗で生じるジュール熱が等しいことを示せ。

次に，図１の回路に自己インダクタンス L のコイルを加えた図２の回路を考える。スイッチが開いた状態でコンデンサーに電荷を与え，時刻 $t=0$ でスイッチを閉じた。

(4)　回路を流れる電流 I の微分方程式を書け。

(5)　設問(4)の微分方程式の解は L, R, C の関係に依存して三つの場合に分類される。それぞれについて説明せよ。特に，L, R, C の関係と，電流 I の一般解を具体的に記すこと。

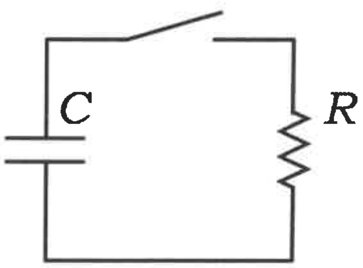

図１

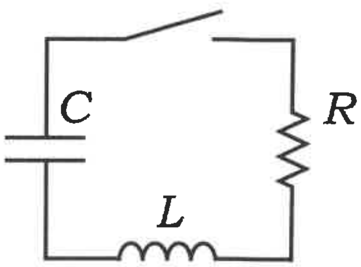

図２

［III］量子力学

次に示す１次元ポテンシャル$V(x)$のもとで運動する質量mの粒子の量子力学的定常状態を考えよう。波動関数$\varphi(x)$は偶関数のみ考えることとする。
以下，$V_0 > 0$, $p > 0$，粒子のエネルギーを$E(0 < E < V_0)$とする。

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & (x < -p) \\ 0 & (-p < x < p) \\ V_0 & (x > p) \end{cases}$$

（１）３つの領域におけるシュレディンガー方程式を書け。
（２）各領域の波動関数は以下のような形に書ける。a, b, k_1, k_2に関する関係式を２つ示せ。

$$\varphi(x) = \begin{cases} ae^{k_1 x} & (x < -p) \\ b\cos k_2 x & (-p < x < p) \\ ae^{-k_1 x} & (x > p) \end{cases}$$

（３）設問（２）の結果を整理して，$k_2 \tan k_2 p = k_1$ の関係が成り立つことを示せ。
（４）エネルギー保存則を考えることにより，V_0, k_1, k_2の間に成り立つ関係式を示せ。

次に，$V_0 \to \infty$の極限状態を考えよう。
（５）自然数nを用いて，$k_2 = \frac{\pi}{2p}(2n-1)$, $|b|^2 = \frac{1}{p}$となることを示せ。また，粒子のエネルギー準位を求めよ。
（６）$n = 1$のとき，粒子の位置の平均$\langle x \rangle$と分散$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$を計算せよ。ここで，$\langle A \rangle$は物理量$A$の平均を表す。
（７）このポテンシャルに，十分小さな摂動ポテンシャル$W\cos\frac{\pi}{2p}x$を加えた。$n = 1$のエネルギー準位の変化量を１次の摂動の範囲で計算せよ。

［IV］熱・統計力学

同種の単原子分子からなるファン・デル・ワールス気体(ファン・デル・ワールスの状態方程式に従う気体)を考える。エントロピーSは，内部エネルギーU，体積V，粒子数Nの関数として，

$$S(U,V,N)=k_{\mathrm{B}}N\ln\left[\left(\frac{U+(aN^2/V)}{N}\right)^{3/2}\left(\frac{V-bN}{N}\right)C_0\right]+S_0,\qquad C_0=\left(\frac{N_0}{U_0+(aN_0^2/V_0)}\right)^{3/2}\left(\frac{N_0}{V_0-bN_0}\right)$$

で与えられる。k_{B}はボルツマン定数，a，bは十分小さい正の定数であり，$S(U_0, V_0, N_0)=S_0$となるようにSの基準をとっている。粒子数Nを固定し，以下の設問に答えよ。Tは温度，pは圧力，dU，dS，dVはそれぞれU，S，Vの全微分を表す。

(1) Sは示量変数か，示強変数かを答えよ。答えだけでよい。

(2) 熱力学第一法則$dU=TdS-pdV$に注意して，$\dfrac{1}{T}=\dfrac{3}{2}\dfrac{k_{\mathrm{B}}N}{U+(aN^2/V)}$，$\dfrac{p}{T}=\dfrac{k_{\mathrm{B}}N}{V-bN}-\dfrac{aN^2/V^2}{T}$を示せ。

(3) 設問(2)の結果から，ファン・デル・ワールスの状態方程式，

$$\left(p+a\frac{N^2}{V^2}\right)(V-bN)=k_{\mathrm{B}}NT$$

が得られる。ファン・デル・ワールスは，理想気体の状態方程式$pV=k_{\mathrm{B}}NT$のp, Vに，補正項$+aN^2/V^2$, $-bN$を加えることで，実在気体に対する上式の状態方程式を提案した。$+aN^2/V^2$，$-bN$の補正の意味を簡単に述べよ。

(4) 長さ，質量，時間の次元を[L]，[M]，[T]として(ここでの[T]は時間の次元であって温度ではない)，a，bの次元を書け。答えだけでよい。

(5) 熱力学第三法則(ネルンスト-プランクの定理)は，Sの基準のとり方に関連している。熱力学第三法則を簡単に述べよ。

同種の単原子分子N個からなるファン・デル・ワールス気体を，体積可変の透熱容器に閉じ込め，体積をV_1からV_2に等温圧縮する($V_2 < V_1$)。

(6) U，Sを，T，V，Nの関数として表せ。

(7) 等温圧縮によるU，Sの変化ΔU，ΔSを求めよ。

(8) 等温圧縮により，気体に流入した熱量Qと，気体がされた仕事Wを求めよ。

(9) 等温圧縮により，気体は熱量を吸収したか，放出したかを答えよ。