令和４年度
広島大学光り輝き入試 総合型選抜
理学部　数学科

筆記試験 問題

令和3年11月20日
自 13時00分
至 15時30分

答案作成上の注意

1. 試験開始の合図があるまでは，この問題冊子の中を見てはいけません。

2. この問題冊子の総ページは６ページです (表紙１ページを含む)。

3. 解答用紙は５枚，下書き用紙は１枚です。解答は，すべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄 (表面) に記入しなさい。もし解答欄が足りない場合には解答用紙の裏面を使用してもよい。

4. 受験番号は，すべての解答用紙と下書き用紙の所定の場所に，必ず記入しなさい。

5. 配付した解答用紙と下書き用紙は，すべて回収します。

6. 試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

[**1**] 以下の問いに答えよ。

(1) z を 0 でない複素数とし

$$\left|z-\frac{1}{z}\right|^2-\left||z|-\frac{1}{|z|}\right|^2=1$$

が成り立つものとする。このとき，z の偏角 θ としてあり得る値をすべて求めよ。ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(2) 袋に異なる 10 色のボールが一つずつ合計 10 個入っている。袋からボールを一つ取り出し，色を調べてから袋に戻す。これを 5 回繰り返すとき，取り出されたボールの色がちょうど 3 種類である確率を求めよ。

[**2**] 1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC がある。点 X，Y，Z を $\overrightarrow{\mathrm{OX}} = x\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OY}} = y\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OZ}} = z\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となるように取る。ただし，x，y，z は 0 より大きく 1 未満の実数であるとする。以下の問いに答えよ。

(1) 三角形 XYZ が $\angle\mathrm{XYZ} = 90^\circ$ を満たす直角三角形であるとする。このとき，$z < y < x$ または $x < y < z$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 三角形 XYZ が $\angle\mathrm{XYZ} = 90^\circ$ を満たす直角三角形であるとする。このとき，$y < \dfrac{1}{2}$ が成り立つことを証明せよ。

(3) 三角形 XYZ が直角二等辺三角形であることはあり得るか。あり得るならば x，y，z の値を一組求め，あり得ないならばそのことを証明せよ。

[**3**] 座標平面上の曲線 $C: y = e^x$ を考える。曲線 C に，点 $(1,0)$ から引いた接線を ℓ_1 とする。以下の問いに答えよ。

(1) ℓ_1 の方程式を求めよ。

(2) h を $0 < h < 1$ を満たす実数とする。直線 ℓ_2 は曲線 C に接し，その傾きは ℓ_1 の傾きの h 倍であるとする。このとき，ℓ_2 の方程式を h を用いて表せ。

(3) ℓ_1 と (2) の ℓ_2 との交点 P の x 座標 b を h を用いて表せ。

(4) (3) で求めた b は，h の関数として $0 < h < 1$ の範囲で増加することを示せ。

(5) 原点 O と (3) の点 P を結ぶ線分 OP を $(1-h):h$ に内分する点を Q とし，その x 座標を $q(h)$ とする。定積分

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} q(h)dh$$

の値を求めよ。ただし，$q(1) = 0$ とする。

[4] m を 2 以上の自然数とし，

$$\left|\cos\frac{n\pi}{m}\right| < \left|\sin\frac{n\pi}{m}\right|$$

を満たす自然数 n を小さい方から順に $n_1, n_2, n_3, \cdots$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $n_4 < m < n_5$ となる最小の m を求めよ。

(2) m を (1) の自然数とし，数列 $\{a_k\}$ を

$$a_k = \frac{n_{4k-3}}{m} + \frac{n_{4k-2}}{m} + \frac{n_{4k-1}}{m} + \frac{n_{4k}}{m} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める。このとき，$\{a_k\}$ は等差数列であることを示せ。

(3) m を (1) の自然数とし，数列 $\{S_N\}$ を

$$S_N = \sum_{k=1}^{4N} \frac{n_k}{m} \quad (N = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める。このとき，$S_N \geqq 32^{10}$ を満たす最小の自然数 N の桁数を求めよ。必要ならば，$\log_{10} 2 = 0.3010\cdots$ を用いてよい。

[**5**] $0 < a < b < c$ および $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} = \dfrac{1}{3}$ を満たす整数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。