令和４年度入学試験問題

# 数　　学

## 数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，
## 数学Ａ，数学Ｂ

令和４年２月25日
自　９時00分
至11時30分

**答案作成上の注意**

1　この問題冊子には，数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，数学Ａ，数学Ｂ（数列，ベクトル）の問題が**5問**あります。総ページは**13ページ**で，問題は４ページ以降の偶数ページにあります。

2　解答用紙は**5枚**です。解答はすべて**対応する番号の解答用紙**の所定の**解答欄**（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。

3　**受験番号**は，それぞれの解答用紙の所定の欄（**2ヶ所**）に必ず記入しなさい。

4　試験終了後は，**解答用紙の右上の番号の順**に並べなさい。

5　配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

6　試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

7　この問題冊子の裏表紙には，試験時間中に机の上に置いてよいものを記載しています。

空　白

空　白

〔1〕 座標平面上の曲線 $y = x^3 + x^2$ を $C$ とする。また，$a$ を実数とし，$L_a$ を点 $(-1, 0)$ を通る傾き $a$ の直線とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $C$ と $L_a$ がちょうど二つの共有点をもつような $a$ の値をすべて求めよ。

(2) $a$ が (1) の条件を満たすそれぞれの場合について，$C$ と $L_a$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3) $C$ と $L_a$ がちょうど三つの共有点をもち，さらに $C$ と $L_a$ で囲まれた二つの部分の面積の差の絶対値が $\dfrac{3}{2}$ となるとき，$a$ の値を求めよ。

空　白

〔２〕 $a$ を正の実数，$t$ を $0<t<1$ を満たす実数とする。座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(0,a)$，$\mathrm{B}(-1,0)$，$\mathrm{C}(1,0)$ を頂点とする二等辺三角形の内接円を $S$ とし，その中心が $\mathrm{I}(0,t)$ であるとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{IBC}$ を $\theta$ とおく。$t$ と $a$ を，それぞれ $\theta$ を用いて表せ。

(2) $a$ を $t$ を用いて表せ。

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心が内接円 $S$ の周上にあるとき，$t$ の値を求めよ。

(4) $\triangle\mathrm{ABC}$ の垂心が $S$ の周上にあるとき，$t$ の値を求めよ。ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られており，その交わる点を三角形の垂心と呼ぶ。

(5) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心が $S$ の周上にあるとき，$t$ のとり得る値をすべて求めよ。

空　白

〔３〕　$a$，$b$を整数とする。また，整数の数列 $\{c_n\}$ を $c_1 = a$，$c_2 = b$ および漸化式

$$c_{n+2} = c_{n+1} + c_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $a = 39$，$b = 13$ とする。このとき，二つの整数 $c_5$ と $c_6$ の最大公約数を求めよ。

(2) $a$ と $b$ はともに奇数であるとする。このとき，自然数 $n$ に対して次の命題 $P_n$ が成り立つことを，$n$ についての数学的帰納法で示せ。

$P_n$ : $c_{3n-2}$ と $c_{3n-1}$ はともに奇数であり，$c_{3n}$ は偶数である。

(3) $d$ を自然数とし，$a$ と $b$ はともに $d$ の倍数であるとする。このとき，自然数 $n$ に対して $c_n$ が $d$ の倍数になることを示せ。ただし，数学的帰納法を用いて証明すること。

(4) $c_{2022}$ が奇数であるならば，$a + b$ も奇数であることを示せ。

空　白

〔4〕 $n$ を自然数とする。袋の中に赤玉が 3 個，白玉が $(n+5)$ 個，合計で $(n+8)$ 個の玉が入っている。また，空箱 A，B，C，D，E，F が用意されている。この準備の下で次の試行 1，試行 2 を順に行う。

**試行 1** 袋から玉を 1 個取り出して，箱 A に入れる。箱 A に入れた玉が白玉なら $i=0$，赤玉なら $i=1$ とおく。

**試行 2** 次に，袋から白玉を $n$ 個取り出して，箱 B に入れる。この時点で，袋に残った玉 7 個のうち，赤玉は $(3-i)$ 個，白玉は $(4+i)$ 個である。この 7 個の中から 2 個の玉を取り出して，箱 C に入れる。

試行 2 を終えたら，箱 A と箱 C の玉の色を記録して，箱 A，B，C の玉をすべて元通り袋に戻す。そして次の試行 3 を行う。

**試行 3** 袋から玉を 1 個取り出して，箱 D に入れる。次に，袋から玉を $n$ 個取り出して，箱 E に入れる。最後に袋から玉を 2 個取り出して，箱 F に入れる。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) $i=0$ であったとき，試行 2 において箱 C に赤玉が 2 個入る条件付き確率 $p_0$ を求めよ。また，$i=1$ であったとき，試行 2 において箱 C に赤玉が 2 個入る条件付き確率 $p_1$ を求めよ。

(2) 試行 1 において，箱 A に赤玉が入る確率 $q_{\mathrm{A}}$ を $n$ を用いて表せ。また，試行 1，試行 2 を順に行うとき，箱 C に赤玉が 2 個入る確率 $q_{\mathrm{C}}$ を $n$ を用いて表せ。

(3) 試行 3 において，箱 D に赤玉が入るという事象を事象 $X$，箱 E に入る玉がすべて白であるという事象を事象 $Y$，箱 F に赤玉が 2 個入るという事象を事象 $Z$ と呼ぶことにする。事象 $X$ と事象 $Y$ がともに起こる確率 $P(X \cap Y)$ を $n$ を用いて表せ。また，事象 $Y$ と事象 $Z$ がともに起こる確率 $P(Y \cap Z)$ を $n$ を用いて表せ。

(4) (3) の事象 $Y$ が起こったとき，(3) の事象 $X$ が起こる条件付き確率 $P_Y(X)$ と，(3) の事象 $Z$ が起こる条件付き確率 $P_Y(Z)$ をそれぞれ求めよ。

空　白

〔５〕 次の問いに答えよ。

(1) $\sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}$ と $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ との大小を比較せよ。

(2) 関数 $f(x)$ を $f(x) = \sqrt{2}^{\,x}$ と定義し，座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を $C$ とする。$C$ 上の点 $(2, f(2))$ における接線の方程式を，実数 $m$，$k$ を用いて $y = mx + k$ と表すとき，$m$ と $k$ の値をそれぞれ求めよ。

(3) $f(x)$ および $m$ と $k$ を (2) のように定める。すべての実数 $x$ に対して $f(x) \geqq mx + k$ が成り立つことを示せ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = \sqrt{2}$ および漸化式 $a_{n+1} = \sqrt{2}^{\,a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ により定義する。自然数 $n$ に対して

$$2 - a_{n+1} \leqq (\log 2) \cdot (2 - a_n)$$

が成り立つことを示し，極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。必要ならば，自然対数の底が $e = 2.718\cdots$ であることを用いてよい。

空　白

試験時間中に机の上に置いてよいもの

○　本学受験票

○　大学入学共通テスト受験票

○　配付した問題冊子等

○　黒鉛筆（和歌，格言等が印刷されているものは不可）

○　鉛筆キャップ

○　シャープペンシル

○　消しゴム

○　鉛筆削り（電動式，大型のもの，ナイフ類は不可）

○　時計（辞書，電卓，端末等の機能があるものや，それらの機能の有無が判別しにくいもの，秒針音のするもの，キッチンタイマー，大型のものは不可）

○　眼鏡

○　ハンカチ

○　目薬

○　ティッシュペーパー（袋又は箱から中身だけ取り出したもの）