令和 4 年度

広島大学一般選抜　後期日程

理学部　数学科

数　学

数学 I，数学 II，数学 III，
数学 A，数学 B

令和 4 年 3 月 12 日

自　9 時 00 分
至　11 時 30 分

答案作成上の注意

1. 試験開始の合図があるまでは，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子には，数学 I，数学 II，数学 III，数学 A，数学 B（数列，ベクトル）に関する問題が５問あります。総ページは１３ページで，問題は４ページ以降の偶数ページにあります。
3. 解答用紙は５枚です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
4. 下書き用紙は３枚です。下書き用紙の注意書きもよく読みなさい。
5. 受験番号は，それぞれの解答用紙の所定の欄に必ず記入しなさい。
6. 配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。
7. 問題冊子と下書き用紙は持ち帰ってください。

空 白

空　白

〔1〕 数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ が与えられたとき，

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

なる規則により，データ $p_1, p_2, p_3, \ldots$ が得られるとする。以下の問いに答えよ。

(1) 数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ の第 k 項が $a_k = (-1)^{k-1}$ で与えられているとき，n 個のデータ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ の中央値を求めよ。

(2) r を $0 < r < 1$ をみたす実数とする。数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ の第 k 項が $a_k = (-r)^{k-1}$ で与えられているとする。n 個のデータ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ の中央値を q_n とする。このとき，次の極限を調べよ。

$$\lim_{n\to\infty} q_n$$

(3) 実数 α に対して，α を超えない最大の整数を $[\alpha]$ と書く。数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ の第 k 項が

$$a_k = (-1)^{k-1}\left[\frac{k-1}{2}\right]$$

で与えられているとする。n 個のデータ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ の平均値を A_n，中央値を M_n とする。このとき，次の極限を調べよ。

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n$　　　(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} M_n$

空　白

〔２〕　t を 0 以上の実数とし，θ の関数 $f(\theta)$ を次で定める。

$$f(\theta) = \sin\theta + e^t \sin 2\theta$$

以下の問いに答えよ。

(1) θ についての方程式 $f(\theta) = 0$ の，$0 < \theta < 2\pi$ の範囲における異なる実数解の個数を求めよ。

(2) 方程式 $f(\theta) = 0$ の $0 < \theta < 2\pi$ における実数解のうち，最小のものを θ_t とする。θ の関数 $f(\theta)$ の導関数 $f'(\theta)$ の $\theta = \theta_t$ における値 $f'(\theta_t)$ を t を用いて表せ。

(3) θ_t は (2) で定めた実数とする。t が 0 以上の実数全体を動くときに，

$$\begin{cases} x = t \\ y = f'(\theta_t) \end{cases}$$

で表される点 (x, y) がえがく xy 平面上の曲線を C とする。曲線 C と直線 $x = 0$ および直線 $y = -\dfrac{15}{4}$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

(4) θ_t は (2) で定めた実数とする。t が 0 以上の実数全体を動くときに，

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = f'(\theta_t) \end{cases}$$

で表される点 (x, y) がえがく xy 平面上の曲線を D とする。曲線 D と直線 $x = 1$ および直線 $y = -\dfrac{15}{4}$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

空　白

〔３〕 (x, y, z) を座標とする座標空間を考える。r は正の実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) a を $0 \leqq a < r$ を満たす実数とする。不等式

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq r^2, \quad y^2 + z^2 \geqq a^2$$

を満たす点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ 全体のなす立体の体積を，r と a を用いて表せ。

(2) O を原点とし $\mathrm{E}(1, 0, 0)$ とする。α を $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。条件

$$r \leqq \mathrm{OP} \leqq 2r \text{ かつ } \angle\mathrm{POE} \leqq \alpha$$

を満たす点 P 全体のなす立体の体積を，r と α を用いて表せ。

(3) 不等式

$$2\,|x| + |y| \leqq \cos z, \quad 0 \leqq z \leqq \frac{\pi}{2}$$

を満たす点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ 全体のなす立体の体積を求めよ。

空　白

〔４〕　n を正整数とする。何も文字が書かれていない状態から始めて，さいころを n 回ふり，文字 A，B からなる長さ n の文字列を次の規則で作る。

1 または 2 の目が出たら文字 A を，それ以外の目が出たら文字 B を，列の右側に付け加える。

この規則で作った長さ n の文字列に BB という並びが現れない確率を p_n とする。また，この文字列に BB という並びが現れずかつ最右端の文字が A である確率を a_n とし，この文字列に BB という並びが現れずかつ最右端の文字が B である確率を b_n とする。たとえば，文字列の長さが 1 ならば，BB という並びは決して現れないから

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad b_1 = \frac{2}{3}, \quad p_1 = 1$$

である。以下の問いに答えよ。

(1) a_2，b_2，および p_2 を求めよ。

(2) a_{n+1} および b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ。

(3) p_{n+2} を p_{n+1} と p_n を用いて表し，p_n を n の式として表せ。

(4) n が偶数であるとし，$n = 2m$ とおく。得られた文字列に BB という並びが現れなかったときの，m 番目の文字が A である条件つき確率を q_m とする。極限

$$\lim_{m \to \infty} q_m$$

を調べよ。

空　白

〔5〕 (x, y, z) を座標とする座標空間において4点

$$\mathrm{A}(2,0,3), \quad \mathrm{B}(0,1,3), \quad \mathrm{C}(0,0,3), \quad \mathrm{D}(1,1,0)$$

を考える。直線 CD を含み直線 AB と平行な平面を α とし，直線 AB を含み直線 CD と平行な平面を β とする。以下の問いに答えよ。

(1) 平面 α と x 軸の交点 E，および平面 α と y 軸の交点 F の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 平面 β と z 軸の交点 G の座標を求めよ。

(3) 連立不等式

$$x \geqq 0, \ \ y \geqq 0, \ \ z \geqq 0$$

で表される空間内の領域において，平面 α と平面 β にはさまれた部分の体積を求めよ。

(4) 点 P は直線 AB 上を動き，点 Q は直線 CD 上を動くとする。線分 PQ の長さが最小値をとるときの点 P および点 Q の座標と，この長さの最小値を求めよ。

空　白