令和４年度

広島大学一般選抜　後期日程

理学部　物理学科

(総合問題)

令和４年３月１２日
自　　９時００分
至　１１時３０分

答案作成上の注意

1．試験開始の合図があるまでは，この問題冊子の中を見てはいけません。
2．この問題冊子は，本表紙を含めて，５枚（10 ページ）です。
3．解答用紙は５枚，下書き用紙は２枚です。
4．問題は[I]～[IV]の４問です。全問に解答すること。
5．すべての解答用紙の所定の場所に，受験番号を必ず記入すること。
6．解答は，すべて対応する解答用紙に記入すること。
7．配付した解答用紙は，持ち出さず，すべて提出すること。
8．試験終了後，問題冊子と下書き用紙は持ち帰ること。
9．解答用紙の注意事項もよく読むこと。

このページは白紙です。

[I]

問1

区間 $0 \leqq x \leqq 1$ での定積分

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を考える。ここで，n は自然数，e は自然対数の底である。以下の問いに答えよ。

(1) I_{n+1} を n と I_n を用いて表せ。

(2) $I_n > I_{n+1}$ を証明せよ。

(3) 次の不等式を証明せよ。

$$\frac{e}{n+2} < I_n < \frac{e}{n+1}$$

(4) 関数 $f_n(x)$ が $f_n(x) = e^x - n\int_0^1 f_n(t)\, t^n dt$ を満たしている。ここで，右辺の定積分を

$$\int_0^1 f_n(t)\, t^n dt = C_n$$

と表し，n のみに依存する定数 C_n とする。C_n を n と I_n を用いて表せ。

(5) $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ。

問2

直径1の円の円周 π は，この円に内接する正 n 角形の周の長さ a_n よりも大きく，同じく外接する正 n 角形の周の長さ b_n よりも小さい。以下の問いに答えよ。

(1) a_n , b_n を表す式を求めよ。

(2) 次の(i), (ii)の関係が成立することを示せ。

(i) $\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{2}{b_{2n}}$

(ii) $a_n b_{2n} = (a_{2n})^2$

(3) a_{12} と b_{12} の値を求め，$3.0 < \pi < 3.3$ であることを示せ。ここで，$\sqrt{2} \fallingdotseq 1.41$, $\sqrt{3} \fallingdotseq 1.73$ と近似してよい。また，$\left(a + b\sqrt{c}\right)^2 = a^2 + b^2 c + 2ab\sqrt{c}$ の関係を参考にしてよい。

[II]

図１のように，質量 m の物体Ａがばね定数 k のばねで壁につながれて滑らかな斜面上におかれている。斜面の傾斜角度は水平面からの角度 θ ($0° < \theta < 90°$)であるとする。壁を原点Ｏとして，斜面を登る向きが正の方向となるように，斜面に平行に x 座標軸をとる。

ばねの自然長を L，重力加速度の大きさを g とする。重力加速度の向きは鉛直下向きである。斜面および壁は静止している。また，空気抵抗やばねの質量，以下の問いに現れる全ての物体の大きさは無視できるものとする。ばねの自然長は十分長く，また，ばね定数は十分大きく，ばねが縮みきることはない。以下の問いに答えよ。

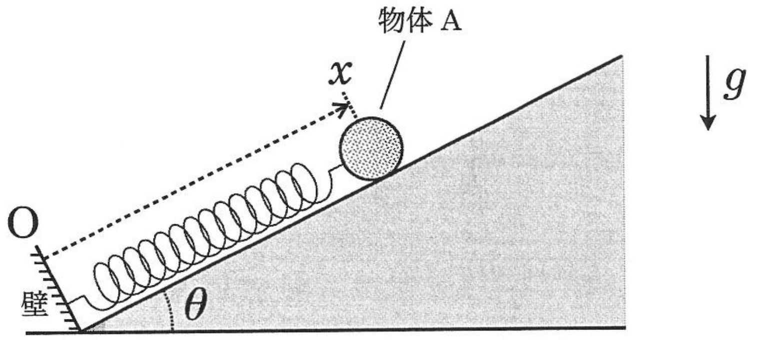

図１

問１　物体Ａの x 方向の加速度を a とする。物体Ａが斜面上で位置 x にあるときの斜面方向の運動方程式を記せ。

問２　物体Ａが斜面上でばねによる力と重力のつりあいの位置で静止しているときの，物体Ａの位置 x_1 を求めよ。導き方も記せ。

次に，図２のように，物体 A がばねによる力と重力のつりあいの位置で静止しているときに，質量 m の物体 B を位置 L に置き，静かに手を離した。その後，物体 B は斜面を落下し，物体 A と合体して斜面上で振動し始めた。物体 A と B の合体した物体を物体 X とする。物体 A と B の合体は瞬時に行われるとする。

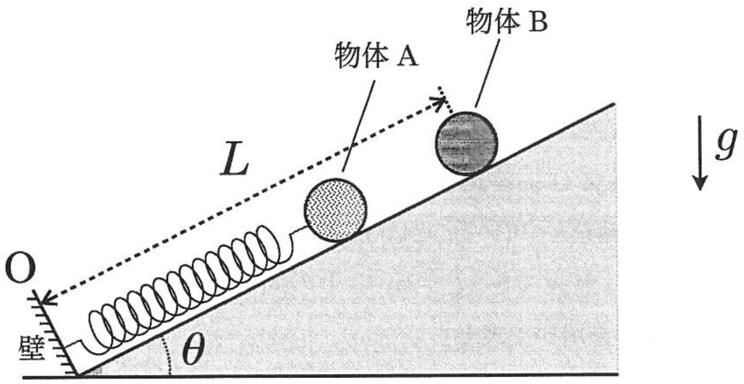

図２

問３　物体 B が物体 A と接触する直前の物体 B の速さを求めよ。導き方も記せ。

問４　物体 B が物体 A と合体した直後の物体 X の速さを求めよ。

問５　物体 X は斜面上を振動する。振動の周期を求めよ。

問６　物体 X が最も原点 O に近づいたときの位置 x_2 を求めよ。導き方も記せ。

［Ⅲ］

図 3 (a) に示す空間に，磁束密度ベクトル $\vec{B}=(kx,\ ky,\ -2kz)$ で表される磁場と，加速度ベクトル $\vec{g}=(0,0,g)$ で表される重力がかかっている。k，g は正の定数である。この空間における半径 a，質量 m の円環状の導体（以下，円環という）の運動を考える。円環の電気抵抗は R であり，また円環を構成する導体の太さは無視できるとする。図 3 (b)，図 3 (c)はそれぞれ，$x-z$ 平面，$x-y$ 平面における磁束線の様子を表している。円環は常に z 軸と垂直な面内にあり，その中心は z 軸上にある。以下，円環の位置，速度，加速度という場合，円環の中心の z 方向の運動に対する量を意味する。

円環は時刻 $t=0$ で原点 O に静止した状態から z 軸正方向 $(0<z)$ に運動を始めた。鉛直下向きを正として z 軸をとっていることに注意せよ。空気抵抗や，円環に流れる電流によって生じる磁場の影響は無視できるとする。以下の問いに答えよ。解答は問題文中に与えられた量から必要なものを用いて表せ。

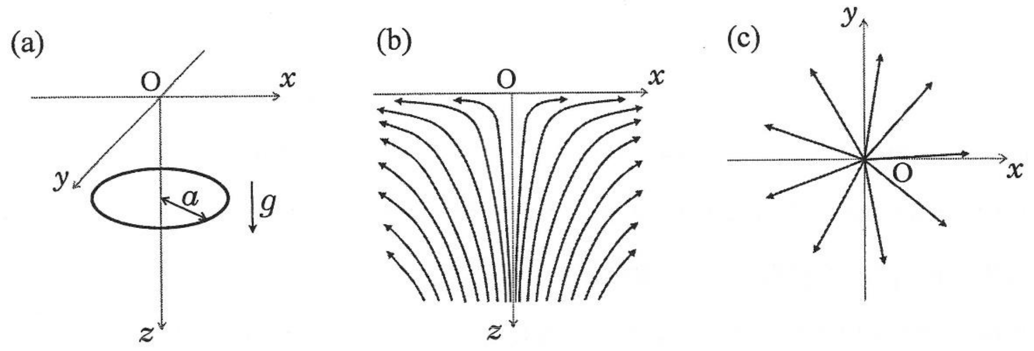

図３

問１　円環の位置が z $(0<z)$ から Δz だけ変化するとき，円環を貫く磁束の変化の大きさを求めよ。導き方も記せ。ただし，円環を貫く磁束に寄与するのは，円環面に対して垂直な磁束密度の成分のみである。

以下の問 2～問 4 では，時刻 t $(0 < t)$ における円環の速度を v とし，時刻 t での状況を考える。

問 2　円環に誘導される起電力の大きさを求めよ。 導き方も記せ。

問 3　単位時間あたりに円環に発生するジュール熱を求めよ。

問 4　円環の単位時間あたりの位置エネルギーの変化の大きさを求めよ。

問 5　時刻 t からさらに十分時間がたった後に円環の速度は一定になった。そのときの速度を求めよ。導き方も記せ。

[Ⅳ]

1モルの単原子分子理想気体を円筒容器にピストンで封じ，容器内の圧力を p_0，温度を T_0，体積を V_0 とした。これを状態Aとする。以後，次の手順で気体の状態を変化させた。ただし，ピストンはなめらかに動くものとする。

過程 1：状態 A の気体に対して，圧力を一定に保ちながら，ゆっくりと熱量を与えると，気体の体積は $3V_0$ になった。(状態 B)

過程 2：状態 B においてピストンを固定し，気体からゆっくりと熱量を奪うと，気体の圧力は $\frac{1}{3}p_0$ になった。(状態 C)

過程 3：状態 C の後，気体の温度を一定に保ちながらピストンをゆっくり操作したところ，気体は $Q_3\,(>0)$ の熱量を放出し，気体の圧力と体積は状態Aでの値に戻った。

問1　過程 $1\to2\to3$ での体積，圧力，温度の変化を，

(1)　横軸に体積 V，縦軸に圧力 p をとったグラフ

(2)　横軸に温度 T，縦軸に体積 V をとったグラフ

で示せ。グラフには状態 A，B，C，およびそれらの間の変化の向きも矢印で示せ。縦軸と横軸には，状態 A，B，C での値を V_0，p_0，T_0 を用いて示せ。

問2　以下の量を，気体定数 R，温度 T_0，熱量 Q_3 のうち必要なものを用いて表せ。導き方も記せ。

(1) 過程 1, 2, 3 での気体の内部エネルギーの変化 ΔU_1，ΔU_2，ΔU_3

(2) 過程 1, 2, 3 において気体が外部からされた仕事 W_1，W_2，W_3

(3) 過程 1 と 2 で，気体が受け取った熱量 Q_1，Q_2

(4) 過程 $1\to2\to3$ の 1 サイクルの熱効率

このページは白紙です。

このページは白紙です。