

中等教育研究開発室年報 第 35 号 (2022 年 3 月 31 日発行) 別冊電子版
2021 年度 授業実践事例

数学科 高等学校第 I 学年

空間図形—空間を埋めつくすことができる多面体の体積—

授業者 富永 和宏

(教育研究大会 公開授業)

広島大学附属中・高等学校

高等学校 数学科 (数学A) 学習指導案

指導者 富永 和宏

- 日時** 令和3年11月27日(土) 第3限 11:40~12:30
- 場所** 数学教室
- 学年・組** 高等学校I年3組40人(男子19人 女子21人)
- 単元** 空間図形
- 目標**
1. 空間における直線や平面の位置関係, 三垂線の定理, オイラーの多面体定理など空間図形の性質について理解するとともに, 図形の性質や三平方の定理などを利用して, 多面体の辺の長さや表面積, 体積を求めることができる。(知識・技能)
 2. 空間図形の性質や三平方の定理など既習の内容を利用しながら考察を進め, 空間図形に関する見方を深めることができる。(思考・判断・表現)
 3. 空間図形の学習に関心を持ち, 課題を解決するため他者と協力しながら見通しを立てようとするなど, 積極的に学習に取り組む。(学びに向かう力, 人間性等)

指導計画 (全8時間)

- | | |
|-----------|--------------|
| 第一次 直線と平面 | 3時間 |
| 第二次 多面体 | 5時間 (本時 4/5) |

授業について

本時は, 単元「空間図形」の課題学習であり, 三平方の定理や空間図形の性質を利用して, 与えられた多面体の体積について考察する。本時のねらいは, 多面体の体積を求めるという課題に対し, 与えられた多面体の模型について面のなす角や立体の切断などの要素に着目してその特徴を分析し, 対象の多面体の中に立方体や正四角錐などを見だし, 周囲と協力しながら既習事項を活用して課題を解決することのよさを実感することである。このような学習活動を通して, 思考力や判断力, 協働して課題を解決する力などを高めるとともに, 身の回りの事象に対して数学的な視点から分析, 考察する態度を育み, 学びに向かう力を伸ばしていきたい。

また, 平面を敷き詰める図形や空間を埋めつくす立体が, エッシャーの作品や結晶構造の中にも見いだすことができるなど, 本時の課題が単に数学の世界の内容だけでなく, 自分の身の回りにも関りがあることを知り, 数学の世界の広がりを実感させたい。

本時のように, 自ら進んで課題に取り組み, 周囲と協力して課題を解決するために考察を進め, また新たな課題を見いだす探究的な学習活動の経験が, 深い学びにつながり数学的活動を一層充実させることになると考えている。

題目 空間を埋めつくすことができる多面体の体積

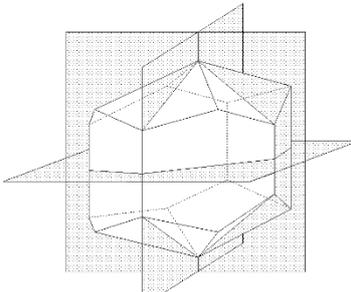
本時の目標

与えられた多面体の体積を求める方法を考察し, 多面体の中に立方体や正四角錐などを見いだすことで, これまでに学習した知識や技能を活用することができる。

本時の評価規準 (観点/方法)

1. 空間図形の性質や三平方の定理を利用して, 与えられた多面体の体積を求めることができる。(知識・技能/様相観察, ワークシートの点検)
2. 与えられた多面体の中に立方体や正四角錐などを見だし, 課題を解決する方法を考察できる。(思考・判断・表現/様相観察, ワークシートの点検)
3. 自ら進んで立体の性質について考察するとともに, 周囲と協力して課題の解決に取り組む。(主体的に学習に取り組む態度/様相観察, ワークシートの点検)

本時の学習指導過程

学習内容	学習活動	指導上の留意点
<p>(導入) 課題の多面体の紹介 (7分)</p>	<p>○課題の多面体の模型を見ながら、その性質を確認する。</p>	<p>・各班に多面体の模型を配布する。</p>
<p>(展開) 多面体の性質の検討 (15分)</p> <p style="text-align: center; border: 1px solid black; padding: 2px;">滞る</p> <p>解法の検討 (20分)</p> <p style="text-align: center; border: 1px solid black; padding: 2px;">見える</p> <p>(まとめ) 多面体の体積の求め方 (3分) 空間を埋めつくす立体 (5分)</p> <p style="text-align: center; border: 1px solid black; padding: 2px;">磨く</p>	<p>課題 与えられた多面体の体積を求めよ</p> <p>○体積を求めるために多面体の性質を調べ、見つけた性質をグループで共有する。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・六角形同士のなす角は直角 ・菱形の短い方の対角線を結ぶと正方形ができる ・菱形の短い方の対角線と、長さの等しい六角形の対角線を結ぶと正方形ができる <p>○グループで共有した性質を発表し、整理して全体で確認する。</p> <p>○等しい長さの菱形と六角形の対角線にそって切断をすることで立方体の存在を確認する。</p> <p>○多面体の性質を基に、三平方の定理を利用して、多面体の体積を求める。</p> <p>○本時の振り返りを行う。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・本時の多面体を基に、空間を埋めつくすことができ、かつ各面がすべて合同な多面体を考える。(菱形十二面体) 	<div style="text-align: center;">  <p>図1</p> </div> <p>・辺の長さが等しいだけなら菱形の可能性もあるが、多面体の性質から正方形といえる。</p> <p>・立方体が把握しづらい生徒には模型に線を引かせて理解を助ける。</p> <p>・立体を分解、構成する視点を持つことが課題の解決につながったことを確認する。</p> <p>・時間があれば、エッシャーの作品を紹介しながら、他の多面体の例も考えさせる。</p>
<p>備考 使用教具 ワークシート, 立体模型 (各班に6個×10班), ミニボード</p>		

【本時の目標】

- (1) 空間図形の性質や三平方の定理を利用して、空間内の線分の長さや図形の面積、立体の体積を求める。
- (2) これまでに学習した立体を与えられた多面体の中に見だし、課題を解決する方法を考察する。
- (3) 自ら進んで立体の性質を見つける活動に取り組む。また、周囲と協力して課題の解決に取り組む。

課題 次の条件を満たす多面体の体積を求めよ。

- 合同な菱形8面および合同な六角形4面からなる。
- 菱形の辺の長さは3、六角形の辺の長さは2と3である。
- 六角形の対角線のうち、長さ2の辺に平行なもの、菱形の短い方の対角線の長さは等しい。
- この多面体は、図1のように、互いに直交する3つの平面に関してそれぞれ対称である。
- この多面体を隙間なく組んでいくと空間を埋めつくすことができる。

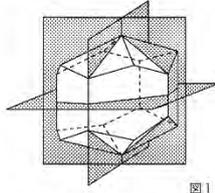
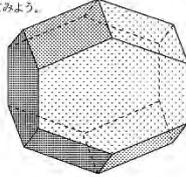
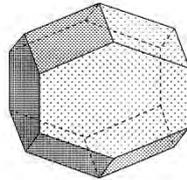


図1

考察① 体積を求めることができるように、この多面体の持つ性質を調べてみよう。
(自分で気付いたこと)



考察② グループ内で気付いたことを発表し合い、共有しよう。
(新たにわかったこと)

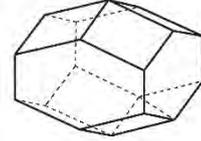


(全体で確認したこと)

考察③ 与えられた多面体のどの部分の長さがわかれば、体積を求めることができるのだろうか？
体積の求め方とあわせて、グループで話し合ってみよう。

これまでに学習した立体を利用して、与えられた多面体の体積を求めよう。

ステップ① どんな立体が利用できるだろうか？
利用する立体を右の図の中にかき入れてみよう。



ステップ② これまでに学習した立体を利用して与えられた多面体の体積を求めるには、どの部分の長さがわかればいいのか？ その求め方もあわせて考えよう。

ステップ③ これまでに学習した立体の体積を計算し、それを利用して与えられた多面体の体積を求めよう。

【課題が早く解決できたグループへの発展課題】

- ① 模型を組み合わせて、課題の多面体が空間を埋めつくす様子を観察しよう。
- ② 課題で扱った多面体の組み合わせ方の規則性を参考にして、立方体や直方体、あるいは三角形柱や四角柱などの多角形柱以外で、1種類の合同な多面体で空間を埋めつくすことができる多面体を考えよう。
(考えた立体を図に表してみよう)
- ③ 各面が合同な多角形で、1種類の合同な多面体で空間を埋めつくすことができるものを考えよう。
(考えた立体を図に表してみよう)

【今日の授業のまとめ】

【今日の授業の振り返り】

1. 今日の授業では、三平方の定理や図形の性質などを用いて、線分の長さや図形の面積、立体の体積を求めることができましたか？
できた _____ できなかった _____
2. 今日の授業では、これまでに学習した立体を与えられた多面体の中に見だし、それを利用して体積を求める方法を考察することができましたか？
できた _____ できなかった _____
3. 今日の学習について、あなたは自ら進んで取り組むことができましたか？
できた _____ できなかった _____
4. 今日の学習について、あなたは周囲の人と協力して取り組むことができましたか？
できた _____ できなかった _____
5. 今日の授業の内容は面白い(興味深い)内容でしたか？
面白かった _____ 面白くなかった _____

今日の授業について、印象に残ったことや気になったこと、感想などを書いてください。

実践上の留意点

本時は、今回の教育研究大会における数学科の主題である『『探究的な学び』を実現する数学科の授業づくり』に沿って実施された授業である。したがって、学習活動の展開に当たっては下記のような点に留意する必要がある。

(1) 生徒の主体的に学習に取り組む態度を大切にする。

本時で扱う多面体は、ほとんどの生徒にとっては初めて見る立体であり、体積を求めるのにどこから手をつけるか悩むことが予想できる。この悩む部分に「探究的な学び」を行う素地がある。これまでに学習した内容を利用して、「ああでもない、こうでもない」と自分自身で試行錯誤したり、あるいはグループでアイデアを出し合ったりしながら課題を解き進める活動は、生徒の主体的に学習に取り組む態度を培うには適していると考えられる。そのため、教師は生徒の支援に重点をおいた授業の展開を心がけるべきで、課題を解決することを優先して教師主導で解法を教える授業にすることは控えるべきである。

(2) 課題を解決した続きについても考えさせる準備をする。

本時のまとめでは、エッシャーの作品「昼と夜」も取り上げながら、平面を合同な図形で埋めつくす様子や、ある物質の結晶構造を取り上げ、合同な多面体で空間を埋めつくす例などを紹介した。本時の課題は与えられた多面体の体積を求めることであったが、それを発展させて「すべての面が合同な多面体で、かつ空間を埋めつくすことができるとしたら、それはどのような多面体になるか」という問いかけを授業のまとめですることができた。このように、与えられた課題が解決できたら終わりとするのではなく、その過程で考察したことを発展させると、さらに新しい課題が考えられるような学習を行うことが「探究的な学び」につながると考えられる。

(3) 課題の解決に向けての具体的な支援を用意する。

生徒の主体的に学習に取り組む態度は大切にすべきだが、課題の解決に向けた糸口が見つからないまま生徒が待ちの姿勢にならないように、具体的な支援を用意しておくといよい。本授業の場合、まず多面体の模型を1グループ(4人)に6個ずつ配布して、実物を手に取って考えることができるようにするだけでなく、空間を埋めつくすことができる様子も観察することができるようにした。模型は画用紙で作っており、対角線などもかき込めるようにしている。授業後の協議会では、クリアファイルを模型の素材に使えば内部まで見通すことができるのでより考察を進めやすくなるとの意見もいただいた。さらに、解決への筋道に見通しが持ちにくいグループもあることを想定し、「少しだけ」、「まあまあ」、「かなり踏み込んだ」の3種類のヒントカードも封筒に入れて配布した。生徒にしてみればヒントは欲しいが、解くのは自力でしたい気持ちもあり、妥協できるところまでのヒントカードを見るなど、一部ゲーム感覚も取り入れて学習活動を進めることができるように工夫した。

(4) PCを使って立体図形を示すことで、より直観的にとらえやすく図形を提示する。

立体を黒板に図で示しても、うまく立体としてとらえにくい生徒もいる。特に複雑な立体になればなるほど、図を見てもその立体をイメージしづらくなる。そこで、本時ではジオジェブラというWEB上で動くソフトを使って立体図形を提示して、立体を見る視点を動かしながらその形を観察させたり、立体の中にある立方体を表示したりした(右図)。視点を動かしながら立体を示すことで立体のイメージがつかみやすくなるし、ちょうど真横から見たときの様子を提示することで、切断面の辺の長さをとらえやすくなるなど活用範囲は広い。本時ではできなかったが、各生徒がPCを操作して立体を観察することができれば、より理解を深めることができたと思われる。

