

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目 (午前)
---------------	-----------

受験番号	M
------	---

令和4年 8月 25日 9:00 ~ 12:00

注 意 事 項

1. 以下の用紙が配布されている.

問題用紙 (表紙を含む)	5 枚
解答用紙	3 枚
下書き用紙	3 枚

2. 問題は全部で 3 問ある.

3. 問 [3] では, (I) か (II) かいずれかの問題を選んで解答せよ.

4. 問題ごとに必ず一枚ずつ別々の解答用紙を用い, それぞれの解答用紙に問題番号を記入して解答せよ. 紙面が不足した場合は裏面を使用してよい.

5. 試験問題の表紙, 解答用紙, および下書き用紙のすべてに受験番号を記入せよ.

6. 試験終了時には, すべての解答用紙および下書き用紙を提出すること.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目 (午前)	令和 4 年 8 月 実施
---------------	-----------	---------------

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ.

[1] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) a を実定数とし, 実行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ を考える. 以下の問に答えよ.

(1) A の階数が 2 となるような a の値を求めよ.

(2) a を (1) で求めた値とする. x, y, z を未知数, p, q, r を定数とする. 実線形方程式

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

が解をもつための必要十分条件を p, q, r を用いて表し, それが成り立つときの一般解を r を用いない形で求めよ.

(B) 有限次元実線形空間 V 上の線形写像 $A: V \rightarrow V$ は $A^3 = I$ (ただし, I は V 上の恒等写像) を満たすとする. $B = (I + A + A^2)/3$, $C = I - B$, $X = \text{Ker } B$, $Y = \text{Ker } C$ とする. 以下の問に答えよ. ただし, 写像の合成を積とみなし, 線形写像 $T: V \rightarrow V$ に対してその核を $\text{Ker } T$ と表す.

(1) $BC = CB = O$ を示せ. ただし, O は V 上の零値写像 (すべての V の元を V の零ベクトルに写す写像) である.

(2) $V = X \oplus Y$ を示せ. ただし, $\oplus$ はベクトル空間の直和を表す.

(3) $W = \{u + A(v) \in V \mid u, v \in X\}$ は X の部分空間であり, かつ $A(W) \subset W$ となることを示せ.

(4) V の次元が奇数ならば, A は 1 を固有値にもつことを示せ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午前）	令和4年8月実施
---------------	----------	----------

[2] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) 実数全体で定義された関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

で定義する. 以下の問に答えよ.

- (1) $f(x)$ の $x > 0$ における導関数を求めよ.
 - (2) $f(x)$ が実数全体で微分可能か否かを証明付きで述べよ.
 - (3) $f(x)$ が実数全体で一様連続か否かを証明付きで述べよ.
- (B) 集合 D と D 上の関数 $f(x, y)$ をそれぞれ $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,
 $f(x, y) = e^{-2(x^2+y^2)} \log(1 - e^{-(x^2+y^2)})$ ($(x, y) \in D$) と定める. 以下の問に答えよ.

- (1) 広義重積分 $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ の値を求めよ.
- (2) $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し, 広義重積分 $I_\alpha = \iint_D e^{-2(x^2+y^2)} \left| \log(1 - e^{-(x^2+y^2)}) \right|^\alpha dx dy$ の収束・発散について調べよ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目 (午前)	令和4年8月実施
---------------	-----------	----------

[3] 次の (I), (II) のいずれかの問に答えよ.

(I) 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) X, Y を位相空間とする. 以下の問に答えよ.

(1) 写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続ならば, 任意の Y の部分集合 A に対して,

$$f^{-1}(\text{Int}A) \subset \text{Int}(f^{-1}(A))$$

が成り立つことを示せ. ここで, Int は集合の内部を表す.

(2) 連続関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ の部分集合 A で,

$$f^{-1}(\text{Int}A) = \text{Int}(f^{-1}(A))$$

を満たさない例を1つ与えよ. ただし, $\mathbb{R}$ には通常の位相が入っているとする.

(3) $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. 任意の Y の部分集合 A に対して

$$f^{-1}(\text{Int}A) \subset \text{Int}(f^{-1}(A))$$

が成り立つならば, f は連続であることを示せ.

(B) $\mathbb{C}$ の部分集合族 $\mathcal{O}$ を $\{U \subset \mathbb{C} \mid U^c \text{ は有限集合}\} \cup \{\emptyset\}$ により定める. ただし, U^c は U の $\mathbb{C}$ における補集合を表す. 以下の問に答えよ.

(1) $\mathcal{O}$ は開集合の公理を満たすことを示せ. 以下, $\mathcal{O}$ により $\mathbb{C}$ に位相を与える.

(2) $\mathbb{C}$ における $\mathbb{Z}$ の閉包 $\overline{\mathbb{Z}}$ を求めよ.

(3) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は連続であり, $\mathbb{Z}$ 上定数であるとする. このとき, f は $\mathbb{C}$ 上定数であることを示せ.

(II) 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) 自由度 m の t -分布の確率密度関数を $f(t|m)$ と表す. 平均 μ , 標準偏差 σ の正規母集団からの独立標本 $X_1, \dots, X_n$ が観測されたとし,

$$T_0 = \frac{\bar{X}}{\sqrt{S^2/n}}$$

とする. ただし,

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

である. T_0 の実現値を t_0 として, t -検定を行うとする. 以下の問に答えよ.

- (1) 帰無仮説 $H_0: \mu = 0$, 対立仮説 $H_1: \mu \neq 0$ とするとき, t -検定の p -値を t_0, n , 確率密度関数 $f(\cdot|\cdot)$ を用いて表せ. ただし, 積分記号を用いてよい.
- (2) 帰無仮説 $H_0: \mu = 1$, 対立仮説 $H_1: \mu > 1$ の t -検定を行う場合, T_0 はどのように修正すべきか.
- (3) 帰無仮説を $H_0: \mu = 0$ とし, 有意水準 α で t -検定を行うとき, 次の (a), (b), (c) を小さい順に並べ, その理由を書け.
 - (a) α の値
 - (b) 対立仮説が $H_2: \mu > 0$ であり, 真の平均が $\mu = 1$ であったときの検出力
 - (c) 対立仮説が $H_3: \mu < 0$ であり, 真の平均が $\mu = 1$ であったときの検出力

(B) n を正の整数として, 次で定義される関数 $f_n(x)$ を考える.

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n^n x^{n-1} e^{-nx}}{(n-1)!} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

以下の問に答えよ. ただし, 必要であれば, 任意の正の整数 m に対して,

$$\int_0^\infty x^{m-1} e^{-x} dx = (m-1)!$$

となることを既知の事実として用いてよい.

- (1) 関数 $f_n(x)$ は確率密度関数であることを示せ.
- (2) 確率変数 X_n が確率密度関数 $f_n(x)$ をもつ確率分布に従うとする. このとき X_n の平均と分散を求めよ.
- (3) 確率変数 X_n が確率密度関数 $f_n(x)$ をもつ確率分布に従うとする. チェビシエフの不等式を用いて, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - 1| > \varepsilon) = 0$$

となることを示せ.