

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目 (午後)
---------------	-----------

受験番号	M
------	---

令和4年 8月 25日 13:30 ~ 16:30

注 意 事 項

1. 以下の用紙が配布されている.

問題用紙 (表紙を含む)	10 枚
解答用紙	2 枚
下書き用紙	2 枚

2. 問題は全部で 9 問ある. この中から 2 問選んで解答せよ.

3. 問題ごとに必ず一枚ずつ別々の解答用紙を用い, それぞれの解答用紙に問題番号を記入して解答せよ. 紙面が不足した場合は裏面を使用してよい.

4. 試験問題の表紙, 解答用紙, および下書き用紙のすべてに受験番号を記入せよ.

5. 試験終了時には, すべての解答用紙および下書き用紙を提出すること.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム

専門科目 (午後)

令和 4 年 8 月実施

選択問題：次の [4] ～ [12] の 9 問中の 2 問を選んで解答せよ。

[4] 次の (A), (B) のすべての間に答えよ。

(A) この問題においては、可換環 R の部分環とは、 R の部分集合 S であって、加法に関して部分群をなし、かつ任意の $x, y \in S$ について $xy \in S$ が成り立つようなものを指す。 (R が乗法についての単位元 1_R をもつ環であっても、 $1_R \in S$ を要求しないことに注意する。) 以下、単位元といえば乗法についての単位元を表すものとする。

- (1) 実数体 $\mathbb{R}$ の部分環であって $\mathbb{R}$ の単位元 1 を含まないものの例を一つ挙げよ。
- (2) 整数環 $\mathbb{Z}$ の部分環をすべて求めよ。
- (3) R が単位元 1_R をもつ整域であるとする。 R の部分環 S であって、 1_R を含まず、かつ S が単位元をもつようなものをすべて求めよ。
- (4) 単位元をもつ可換環 R, S および加法・乗法を保つ写像 $f: R \rightarrow S$ であって、 f が R の単位元を S の単位元に写さないようなものの例を挙げよ。
- (5) 単位元をもつ可換環 R, S および加法・乗法を保つ全射 $f: R \rightarrow S$ について、 f は R の単位元を S の単位元に写すことを示せ。

(B) 複素数係数の二変数多項式環 $\mathbb{C}[x, y]$ において、 x^2 および xy の生成するイデアルを $I = (x^2, xy)$ とおく。

- (1) $f \in I$ ならば f は x で割り切れることを示せ。
- (2) $x^3 + xy^4 \in I$ を示せ。
- (3) I は単項イデアルでないことを示せ。

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目 (午後)	令和 4 年 8 月 実施
---------------	-----------	---------------

[5] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) 複素数を成分とする 2×2 の正則行列全体が行列の積に関してなす群を $GL(2, \mathbb{C})$ と書く.

$$\zeta := \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{5}\right)$$

とおき, $GL(2, \mathbb{C})$ の二つの元

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \bar{\zeta} \end{pmatrix}$$

を考える. ここで $\bar{\zeta}$ は ζ の複素共役である. $GL(2, \mathbb{C})$ の部分集合 G を

$$G := \{ A^i B^j \mid i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z} \}$$

により定義する. 以下の問に答えよ.

(1) G は $GL(2, \mathbb{C})$ の部分群であることを示し, その位数を求めよ.

(2) G の部分集合

$$\langle B \rangle := \{ B^j \mid j \in \mathbb{Z} \}$$

は G の正規部分群か否かを理由とともに答えよ.

(3) G の部分群で位数が 2 のものの個数を求めよ.

(B) $f(x)$ を有理数係数の 4 次式とする. $f(x)$ は多項式環 $\mathbb{Q}[x]$ において既約であるとし, $f(x) = 0$ の複素数解を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ とする. また $f(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体を $L := \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ と書く. さらに, 多項式 $f(x)$ の有理数体上のガロア群 $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ は

$$g(\alpha_1) = \alpha_2, \quad g(\alpha_2) = \alpha_1, \quad g(\alpha_3) = \alpha_4, \quad g(\alpha_4) = \alpha_3$$

なる元 g と

$$h(\alpha_1) = \alpha_2, \quad h(\alpha_2) = \alpha_3, \quad h(\alpha_3) = \alpha_4, \quad h(\alpha_4) = \alpha_1$$

なる元 h により生成されているとする. 以下の問に答えよ.

(1) L の $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数を求めよ.

(2) 複素数

$$\delta := \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (\alpha_i - \alpha_j)$$

は有理数か否かを理由とともに答えよ.

(3) 体の拡大 $L/\mathbb{Q}$ の中間体 M で $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数 $[M : \mathbb{Q}]$ が 4 となるものの個数を求めよ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和 4 年 8 月実施
---------------	----------	--------------

[6] $\mathbb{C}^2$ の部分空間 X を $X := \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ と定める. また X 上の同値関係 $\sim$ を

$$v \sim v' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ such that } v = \lambda v' \quad (v, v' \in X)$$

により定め, X の $\sim$ による商空間を $X/\sim$ と書く. 各 $v = (z_1, z_2) \in X$ について, v が代表する同値類 $[v]$ を $[z_1 : z_2]$ と表す. また $\mathbb{R}^3$ の正則部分多様体

$$S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

について考える. このとき, 以下の問に答えよ.

- (1) 各 $i = 1, 2$ について, $X/\sim$ の開集合 O_i を $O_i := \{[z_1 : z_2] \in X/\sim \mid (z_1, z_2) \in X, z_i \neq 0\}$ と定め, 写像 u_i を

$$\begin{aligned} u_1 : O_1 &\rightarrow \mathbb{R}^2, [z_1 : z_2] \mapsto (\operatorname{Re}(z_2/z_1), \operatorname{Im}(z_2/z_1)), \\ u_2 : O_2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, [z_1 : z_2] \mapsto (\operatorname{Re}(z_1/z_2), \operatorname{Im}(z_1/z_2)) \end{aligned}$$

と定める. $\mathcal{A} := \{(O_1, \mathbb{R}^2, u_1), (O_2, \mathbb{R}^2, u_2)\}$ は $X/\sim$ 上の C^∞ 級アトラスを定め, 特に $X/\sim$ は実 2 次元 C^∞ 級多様体となる. このとき局所座標 u_1 から u_2 への座標変換を書き下せ. ただし定義域と値域も明記すること.

- (2) 各 $v = (z_1, z_2) \in X$ について, 2 次正方複素行列 Q_v を

$$Q_v := \begin{pmatrix} z_1 & \overline{z_2} \\ z_2 & -\overline{z_1} \end{pmatrix}$$

と定める. このとき Q_v は複素正則行列であることを示せ. また, 各 $v = (z_1, z_2) \in X$ について, 2 次正方複素行列 H_v を

$$H_v = Q_v \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_v^{-1}$$

と定める. $v, v' \in X$ が $[v] = [v']$ を満たすとき, $H_v = H_{v'}$ となることを示せ.

- (3) (2) の設定において, 各 $v \in X$ について, 行列 H_v の (i, j) 成分を $h_{ij}(v)$ とおく. このとき $h_{11}(v)$ は実数であることを示せ. また

$$x_v := (2h_{11}(v) - 1, 2(\operatorname{Re} h_{12}(v)), 2(\operatorname{Im} h_{12}(v)))$$

とおくと, $x_v \in S^2$ となることを示せ.

- (4) (3) の設定において, 写像

$$\varphi : X/\sim \rightarrow S^2, [v] \mapsto x_v$$

が well-defined であることを示せ. また (1) で定めた $X/\sim$ の C^∞ 級多様体構造について, φ が $X/\sim$ から S^2 への C^∞ 級写像となることを示せ. さらに $p = [1 : 0] \in X/\sim$ について, φ の p における全微分 $(d\varphi)_p$ の階数を求めよ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和 4 年 8 月実施
---------------	----------	--------------

[7] 3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 S^2 , X , Y をそれぞれ次で定義する.

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$

$$X = S^2 \cup \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\},$$

$$Y = S^2 \cup \{(x_1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| \leq 1\}.$$

以下の問に答えよ.

- (1) X の基本群を求めよ.
- (2) Y の基本群を求めよ.
- (3) X から Y へのレトラクションが存在するか否かを判定せよ.
- (4) S^2 の整数係数ホモロジー群を求めよ.
- (5) X の整数係数ホモロジー群を求めよ.
- (6) $f : X \rightarrow X$ を連続写像とする. f が誘導する整数係数 2 次元ホモロジー群の間の準同型写像 $f_{\#} : H_2(X) \rightarrow H_2(X)$ が単射であるならば, f は全射であることを証明せよ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目 (午後)	令和 4 年 8 月実施
---------------	-----------	--------------

[8] 次の (A), (B), (C) のすべての間に答えよ.

(A) $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$, $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ とおく. ただし, $w \in \mathbb{C}$ に対して $\operatorname{Re} w$ は w の実部, $\operatorname{Im} w$ は w の虚部を表す. 以下の間に答えよ.

(1) $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ とおく. このとき, f は D_1 から D_2 への全単射であることを示せ.

(2) $g(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3$ とおく. このとき, g による D_1 の像 $g(D_1)$ を複素平面に図示せよ.

(B) C を複素平面内の単位円周 $|z| = 1$ とし, C の向きは反時計回りとする. 次の (1), (2) の複素線積分の値を求めよ.

(1) $\int_C \frac{dz}{z^4 - 8z}.$

(2) $\int_C \frac{dz}{|z - 2i|^2}.$

(C) $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ とし, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ は D 上で正則な関数であり, $f(0) = 0$ を満たすと仮定する. 以下の間に答えよ.

(1) 関数 $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & (0 < |z| < 1) \\ f'(0) & (z = 0) \end{cases}$$

で定義するとき, g は D 上で正則な関数であることを示せ.

(2) $r \in (0, 1)$ とし, $M = \max_{|z| \leq r} |f(z)|$ とする. このとき, 任意の $|z| \leq r$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ に対して $|f(z)| \leq \frac{M}{r}|z|$ が成り立つことを示せ.

(3) $h: D \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(z^n) = f(z) + f(z^2) + f(z^3) + \cdots + f(z^n) + \cdots$$

と定義するとき, h は D 上で正則な関数であることを示せ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和 4 年 8 月実施
---------------	----------	--------------

[9] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) 以下の問に答えよ.

- (1) 非負の実数 a, b が $|a - b| = a + b$ を満たすならば, $a = 0$ あるいは $b = 0$ であることを示せ.
- (2) g は $\mathbb{R}$ 上の非負ルベーク可積分関数で $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 0$ を満たすとする. このとき, $\mathbb{R}$ 上ほとんどいたる所で $g(x) = 0$ となることを示せ.
- (3) f は $\mathbb{R}$ 上の実数値ルベーク可積分関数で

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \right| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$$

を満たすとする. このとき, 次の (i), (ii) のいずれかが成り立つことを示せ.

- (i) $\mathbb{R}$ 上ほとんどいたる所で $f(x) \geq 0$.
- (ii) $\mathbb{R}$ 上ほとんどいたる所で $f(x) \leq 0$.

(B) $p \in (0, \infty)$ とし, g を $[1, \infty)$ 上の有界な実数値ルベーク可測関数で $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = p$ を満たすものとする. 関数 $f : [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ を $f(x) = \exp \left(\int_1^x \frac{g(u)}{u} du \right)$ で定義する. 以下の問に答えよ.

- (1) $t \geq 1$ とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{g(nv)}{v} dv = \log(t^p)$ を示せ.
- (2) $t \geq 1$ とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(nt)}{f(n)} = t^p$ を示せ.
- (3) ある $M \in (0, \infty)$ に対し, 次が成り立つことを示せ.

$$0 < \frac{f(tx)}{f(x)} \leq t^M \quad (x \geq 1, \quad t \geq 1).$$

- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nf(n)} \int_n^{3n} f(u)du$ を求めよ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目 (午後)	令和 4 年 8 月実施
---------------	-----------	--------------

[10] 確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の確率変数列 $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ ($n = 1, 2, \dots$) を考える. 各 $n = 1, 2, \dots$ に対して, $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ は互いに独立で次の確率密度関数 $f_n(x)$ をもつ同一の分布に従うとする.

$$f_n(x) = p_n \phi(x | \mu) + (1 - p_n) \phi(x | \mu + \delta_n) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

ただし, $a \in \mathbb{R}$ に対して, $\phi(\cdot | a)$ は平均 a , 分散 1 の正規分布の確率密度関数

$$\phi(x | a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

を表し, $p_n \in (0, 1)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\delta_n > 0$ は定数とする. さらに, 各 $n = 1, 2, \dots$ に対して,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{n,i}$$

とする. このとき, 以下の間に答えよ.

- (1) 各 $n = 1, 2, \dots$ に対して, $X_{n,1}$ の期待値と分散を求めよ.
- (2) ある定数 $\delta > 0$ が存在して, 任意の $n = 1, 2, \dots$ に対して $\delta_n = \delta$ が成立し, $p_n \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) が成立するとする. このとき, $\bar{X}_n$ が μ に確率収束することを示せ.

以下では, ある定数 $p \in (0, 1)$ が存在して, 任意の $n = 1, 2, \dots$ に対して $p_n = p$ が成立し, $\delta_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) であるとする.

- (3) 次が成立することを示せ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(X_{n,1} < \frac{\delta_n}{2}\right) = p.$$

- (4) 各 $n = 1, 2, \dots$ に対し,

$$Y_{n,i} = X_{n,i} I\left(X_{n,i} \geq \frac{\delta_n}{2}\right) \quad (i = 1, \dots, n), \quad \bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{n,i}$$

とおく. ただし, $I(\cdot)$ は定義関数を表し, 括弧内が真であれば 1, そうでなければ 0 となる関数である. このとき, 任意の $M > 0$ に対し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\bar{Y}_n \geq M) = 1$$

が成立することを示せ.

- (5) 各 $n = 1, 2, \dots$ に対し, $Z_{n,i} = X_{n,i} - Y_{n,i}$ ($i = 1, \dots, n$) とおく.

$$\bar{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{n,i}$$

が $p\mu$ に確率収束することを示せ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和 4 年 8 月実施
---------------	----------	--------------

[11] 次の (A), (B), (C) のすべての間に答えよ. ただし, 常微分方程式の解は実数値関数を考えるものとする.

(A) 次の常微分方程式

$$(*) \quad y' + y^2 = \frac{2}{x^2}$$

を考える.

- (1) $(*)$ の解で $y_0(x) = \frac{a}{x}$ の形のものを求めよ. ただし, a は正の実数とする.
- (2) $(*)$ の解 y に対して, (1) の $y_0(x)$ を用いて $u(x) = y(x) - y_0(x)$ とおく. このとき u の満たす微分方程式を求めよ.
- (3) $(*)$ の解で $y(1) = 3$ を満たすものを求めよ.

(B) $|x| < \frac{\pi}{2}$ の範囲において, $y = y(x)$ に関する次の常微分方程式の初期値問題

$$(**) \quad \begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} + (\tan x) \frac{dy}{dx} + 2(\cos^2 x)y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

を考える.

- (1) $(**)$ の解 $y = y(x)$ に対して $Y(t) = y(x)$, $t = \sin x$ と定める. このとき $Y = Y(t)$ の満たす微分方程式を求めよ.
 - (2) 初期値問題 $(**)$ を解け.
- (C) $y(t)$ は $[0, \infty)$ 上で定義された C^2 級の関数とし, 次の常微分方程式を満たすとする.

$$y'' + 2y' - 2y + y^3 = 0, \quad t > 0.$$

この $y(t)$ により関数 $E(t)$ を次で定める.

$$E(t) = \frac{1}{2}y'(t)^2 - y(t)^2 + \frac{1}{4}y(t)^4.$$

以下の間に答えよ.

- (1) $t_1 \geq t_2 \geq 0$ に対して $E(t_1) \leq E(t_2)$ が成り立つことを示せ.
- (2) 極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t)$ が存在することを示せ.
- (3) この関数 y は $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ を満たすとする. このとき, $t > 0$ において $y(t) > 0$ であることを示せ. さらに, ある実数 α に対して $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \alpha$ を満たすならば, $\alpha = \sqrt{2}$ であることを示せ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム

専門科目（午後）

令和 4 年 8 月実施

[12] $X_1, \dots, X_n$ ($n \geq 1$) を互いに独立にいずれも一様分布 $U(0, \theta)$ ($\theta > 0$) に従う確率変数列とし、その実現値を $x_1, \dots, x_n$ とする。ここで、一様分布 $U(0, \theta)$ の確率密度関数は

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & (0 \leq x \leq \theta) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

で与えられる。 $X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ と定義し、その実現値を $x_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$ とする。また、 θ の推定量 $\hat{\theta}$ の平均二乗誤差を $\text{MSE}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$ と定義する。このとき、以下の問に答えよ。

- (1) θ の最尤推定量を $\hat{\theta}_{\text{ML}}$ とするとき、 $\hat{\theta}_{\text{ML}} = X_{(n)}$ であることを示せ。
- (2) $T = X_{(n)}$ とするとき、 T の従う確率分布の確率密度関数を求めよ。
- (3) $\hat{\theta}_{\text{ML}}$ は θ の不偏推定量であるかどうかを理由とともに答えよ。
- (4) $X_{(n)}$ は θ の十分統計量であることを示せ。
- (5) $X_{(n)}$ は完備であることが知られている。このとき、 θ の一様最小分散不偏 (UMVU) 推定量 $\hat{\theta}_{\text{UMVU}}$ を求めよ。
- (6) θ も確率変数とみなし、パラメータ $\alpha > 0, \beta > 0$ をもつようなパレート分布に従うとする。ただし、パレート分布の確率密度関数は

$$g(\theta) = \begin{cases} \frac{\beta \alpha^\beta}{\theta^{\beta+1}} & (\theta \geq \alpha) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

である。 $\beta > 1$ のとき、 θ の平均を α と β を用いて表せ。

以降、 $x_{(n)} > \alpha$ を仮定する。

- (7) $X = (X_1, \dots, X_n)$ と θ の同時確率密度関数を $p(x, \theta) = g(\theta)f(x|\theta)$ とおく。このとき、 X の周辺確率密度関数 $q(x)$ を求めよ。
- (8) $x = (x_1, \dots, x_n)$ が与えられた下での θ の確率密度関数 $h(\theta|x)$ は

$$h(\theta|x) = \frac{p(x, \theta)}{q(x)}$$

により与えられる。この $h(\theta|x)$ に対応する確率分布の名称を答え、その平均 $\hat{\theta}_B$ を $n, \beta, x_{(n)}$ を用いて表せ。

- (9) (8) で求めた $\hat{\theta}_B$ において、 $\beta = 2$ とし、 $x_{(n)}$ を確率変数 $X_{(n)}$ に置き換えたとき、 $\text{MSE}(\hat{\theta}_B)$ を計算せよ。また、 $\text{MSE}(\hat{\theta}_B)$ と (5) で求めた $\hat{\theta}_{\text{UMVU}}$ の平均二乗誤差 $\text{MSE}(\hat{\theta}_{\text{UMVU}})$ との大小を比較せよ。