2022年10月入学及び2023年4月入学
広島大学大学院先進理工系科学研究科（博士課程前期）入学試験問題

物理学プログラム
量子物質科学プログラム（物理学分野）

専 門 科 目

2022年8月25日　9:00～12:00

注意事項

（１）以下の用紙が配付されている。

問題用紙（表紙を含む）	５枚
解答用紙	４枚
下書き用紙	１枚

（２）問題は全部で４問あり，[1]～[4]の問題番号および出題科目名を□に示してある。

（３）これらすべてについて解答せよ。

（４）解答は問題ごとに指定の用紙を用いること。解答方法が特に指定されている場合を除き，最終的な答えだけでなく，解答に至った考え方や途中計算も示せ。紙面が不足した場合は表面に「裏面に続く」と明記し，裏面に記入せよ。

（５）解答用紙および下書き用紙のすべてに受験番号を記入せよ。

（６）試験終了後，すべての解答用紙および下書き用紙を提出せよ。

［1］ 力学

1. ばね定数kのばねが，滑らかで水平な床に置かれ，片側は壁に固定されており，もう片方に質量mの質点が取り付けられている。空気から質点には速度に比例した抵抗が働くものとし，その比例係数をcとする。ばねに平行に座標xをとり，ばねが自然長の時の質点の位置を原点とし，壁と逆側の向きを正の方向とする。壁に垂直な方向の質点の運動のみ考えることとして，以下の問いに答えよ。

(1) この系の運動方程式を立てよ。
(2) $c^2 < 4mk$のとき，運動方程式の一般解を求め，どのような運動をするのか図を用いて説明せよ。
(3) $c^2 > 4mk$のとき，運動方程式の一般解を求め，どのような運動をするのか図を用いて説明せよ。

2. 図1のように3つの質点と3つのばねと1つの棒が組み合わされて構成され，壁に取り付けられて水平な台に置かれた系を考える。すべての質点の質量をm，すべてのばねのばね定数をkとする。また，棒の長さを $2a$ とし，1つのばねは棒の中点の場所に取り付けられているものとする。棒は伸び縮みせず，たわまないものとし，棒の質量は無視できるものとする。台の表面は滑らかであるとする。それぞれの質点の座標をx_1，x_2，x_3とし，ばねが自然長の時の質点の位置を原点とし，壁と逆側の向きを正の方向とする。この系の質点の振動モードについて以下の問いに答えよ。ただし，質点の振動の振幅は小さいものとし，壁に垂直な運動のみ考えるものとし，壁に平行な方向の運動は微小なものとして無視する。空気からの抵抗も考えない（$c = 0$）ものとする。

(1) この系のラグランジアンを求めよ。
(2) 上で求めたラグランジアンより，この系の運動方程式を導出せよ。
(3) この系の固有振動モードの1つは，棒の中点が静止した状態で，棒の両端が逆位相で振動するものである。棒の中点の周りに関する回転の運動方程式を導出し，その角振動数が$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$であることを示せ。問 2.の(2)で求めた式を利用しても良い。
(4) この系の固有角振動数について，ω_1以外の2つを求めよ。
(5) この系の固有振動モードは3種類ある。それらを図を用いて説明せよ。

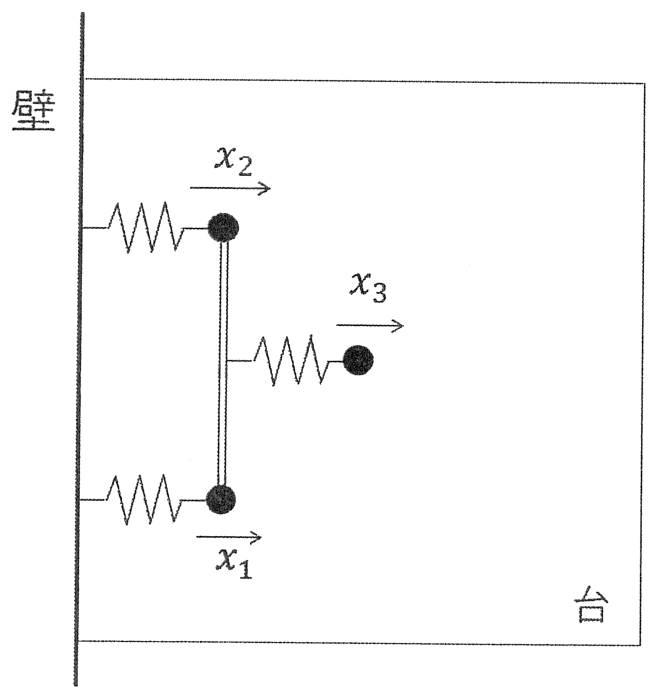

図 1

［2］ 電磁気学

1回巻きの円形コイルに流れる電流によって生じる磁場について以下の問いに答えよ。

(1) 真空中に置かれた半径 R の円形コイルに流れる定常電流 I によって発生する磁束密度 $\vec{B}$ について考える。図1のようにコイルは xy 平面にあり，z 軸はコイルの中心Cを通るとする。この時，長さ dl のコイルの微小断片によって，Cから a 離れた z 軸上の点Aに生ずる磁束密度 $d\vec{B_1}$ の z 軸成分の大きさを示せ。ただし真空の透磁率を μ_0 とする。また，電流 I の微小導線部分 $d\vec{l}$ により，$\vec{r}$ だけ離れた位置に生ずる磁束密度 $d\vec{B}$ は次式で表せる。

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

(2) コイル全体から点Aに生ずる磁束密度 $\vec{B_2}$ の大きさを求めよ。

(3) 次に，この半径 R の円形コイル2つを R だけ離れて平行に置いた場合を考える。図2のように2つの電流の向きは同じで大きさも同じ I であり，2つのコイルの中心は z 軸上に存在している。この時，2つのコイルから等距離にある z 軸上の点Oでの磁束密度 $\vec{B_3}$ の大きさを求めよ。

(4) 図2の装置を用いることで，点Oにおいて地磁気の影響がない実験環境を作ることができる。コイルの半径は $R = 0.10$ m とする。真空の透磁率 $\mu_0 = 1.257\times10^{-6}$ N/A^2，地磁気を 5.028×10^{-5} ($= 1.257\times4\times10^{-5}$) T として，点Oでこの地磁気を打ち消すのに必要な電流値を有効数字2桁で求めよ。ただし，$\sqrt{5} \fallingdotseq 2.236$ とする。

(5) この装置で発生した磁束密度は点O付近でほとんど一様になるという特徴を持つため，問(4)に示すような実験環境を容易に作ることができる。そこで，点Oから z 軸上を z だけわずかに離れた点Z（ $|z| \ll R$ ）について考える。この点Zでの磁束密度 $\vec{B_4}$ の z 成分を z の関数として表し，点O付近で磁束密度の変化が小さいことを説明せよ。

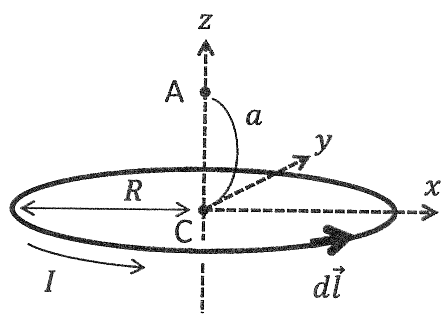

図1

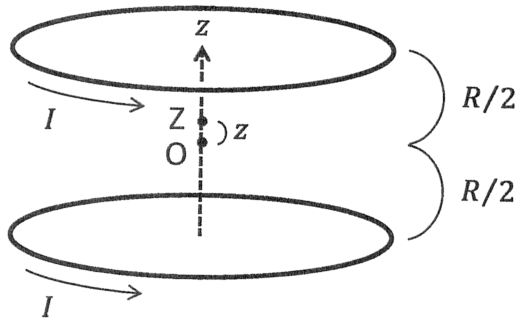

図2

[３] 量子力学

x方向とy方向の長さがそれぞれLの二次元平面内の電子の物理を考える。xy面内のポテンシャルエネルギーはゼロに保たれており，ある方向に十分に大きな磁場が印加されているものとする。このとき以下の問いに答えよ。ただし，電子の電荷を$-e$とし，質量をmとする。プランク定数を2πで割った量を$\hbar$とする。また，Lは十分に大きいものとする。また，y方向には周期的境界条件が存在するものとする。ここでは，電子のスピンの効果については無視することとする。

(1) ベクトルポテンシャル $\vec{A}$ を$\vec{A}=(0,Bx,0)$ とするとき，磁束密度ベクトルを求めよ。

(2) 波動関数を$\Psi(x,y)$，エネルギーをEとするとき，この系の電子に関する，時間に依存しないシュレディンガー方程式を書け。一般に，ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルが存在するときの二次元系の電子の時間に依存しないシュレディンガー方程式は，

$$\left\{\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}+eA_x\right)^2+\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}+eA_y\right)^2-eV(x,y)\right\}\Psi(x,y)=E\Psi(x,y)$$

と書ける。ここで，A_x，A_yはそれぞれ，$\vec{A}$のx成分，y成分である。また，$V(x,y)$はスカラーポテンシャル，Eはエネルギー固有値である。

(3) 波動関数$\Psi(x,y)$を$\Psi(x,y)=\phi(x)\exp(-iky)$ とおくとき，$\phi(x)$に関する方程式を求めよ。また，ここではkを実数とする。

(4) kが満たすべき条件を求めよ。

(5) 問(3)で求めた方程式は，調和振動子のシュレディンガー方程式と同型であることに注意し，振動の中心の座標x_0を$\hbar$，e，B，kを用いて表せ。

(6) 基底状態の$\phi(x)$の関数形は $\phi(x)=C\exp(-(x-x_0)^2/\lambda)$である。$\Psi(x,y)$の規格化を考えることで$|C|^2$を$\lambda$と Lを用いて表せ。ただし，Cと$\lambda(>0)$ はxに依存しない変数である。

(7) 問(6)のλを$\hbar$，e，Bを用いて表せ。

(8) 問(6)の波動関数$\phi(x)$のエネルギーを$\hbar$，e，B，m を用いて表せ。

(9) 問(3)の$\phi(x)$に関する方程式の全てのエネルギー固有値を$\hbar$，e，B，m を用いて表せ。

［4］ 熱統計力学

以下の問いに答えよ。

(1) エンタルピーHは内部エネルギーU，圧力p，体積Vを用いて，$H=U+pV$と表わされる。この式と熱力学第1法則および比熱の定義式から，定圧比熱C_p，エンタルピー，温度T，圧力の間に$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$ が成り立つことを示せ。

(2) ある閉じた系の内部エネルギーの微小変化dUは，エントロピーSと体積Vの微小変化dS, dVを用いて，$dU = TdS - pdV$ と表される。この関係式を用いて，エントロピーSとエンタルピーHの間に，下記の2つの関係式が成り立つことを示せ。

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - \frac{V}{T}$$

(3) 問(2)の関係式を用いて，下記の関係式が成り立つことを示せ。

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V$$

(4) エンタルピーが保存される場合について，$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$を$T, V, C_p$, $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$で表せ。

下図のように，断熱壁で作られたシリンダーの中央部に綿などでできた多孔質栓を固定して，断熱材で作られたピストンⅠ，Ⅱを用いて左側から右側にゆっくり気体を押し出したとき，押し出される前と後の気体の温度がどのように変化するかを調べる実験を考える。最初に図1のように，ピストンⅠで多孔質栓より左側に体積V_1の気体を閉じ込め，ピストンⅡは多孔質栓の右側に密着している。この状態から，ピストンⅠ，Ⅱにかかる圧力p_1，p_2 ($p_1 > p_2$)を一定に保ちながらゆっくりそれぞれのピストンを動かし，最後に図2のように，ピストンⅠを多孔質栓に密着するまで動かしたとする。その時，多孔質栓の右側部分に押し出された気体の体積はV_2となった。この過程について，以下の問いに答えよ。ただし，多孔質栓の体積は無視できるとする。

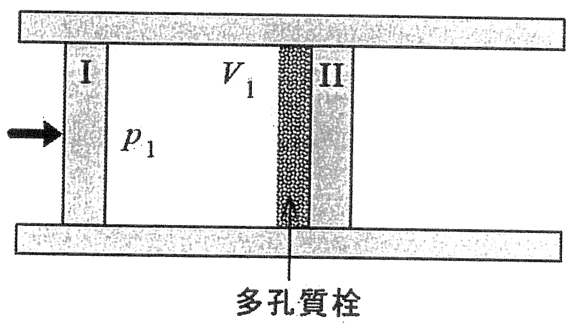

図1

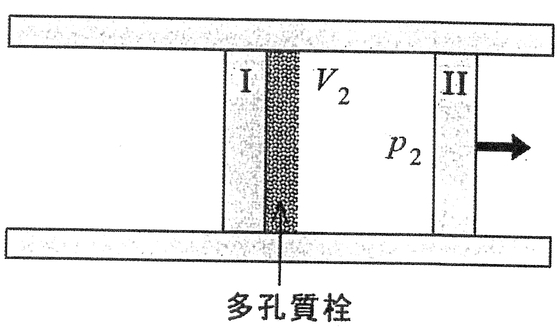

図2

(5) この過程でエンタルピーが保存されることを示せ。

(6) 問(4)の結果を用いて，気体が理想気体の場合，押し出される前後で気体の温度は変化しないことを示せ。