広島大学大学院先進理工系科学研究科

量子物質科学プログラム

博士課程前期 入学試験問題

基 礎 科 目

2022 年 8 月 25 日　13:30〜15:00

注意事項

（1）以下の７枚の用紙が配付されている．

問題用紙（表紙を含む）	３枚
解答用紙	３枚
下書き用紙	１枚

（2）問題は全部で３問あり，［1］，［2］，［3］の番号で示してある．

（3）問題ごとに一枚ずつ別々の解答用紙を用いよ．それぞれの解答用紙の左肩に問題番号を記入すること．紙面が不足した場合は裏面を用いてよい．

（4）解答用紙及び下書き用紙に受験番号を記入せよ．

（5）試験終了後，解答用紙及び下書き用紙を提出すること．問題用紙は持ち帰ること．

広島大学大学院先進理工系科学研究科（博士課程前期）
量子物質科学プログラム　入学試験問題

2022.8.25

試験科目	基礎科目

[1] $y(x)$ に関する 2 階線形微分方程式について，次の問いに答えよ．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$，$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ であり，a は定数とする．

(1) 微分方程式 $y'' - 3y' - 40y = 0$ について，一般解を求めよ．

(2) 微分方程式 $y'' - 3y' - 40y = e^{ax}$ について，$a^2 - 3a - 40 \neq 0$ の場合の特殊解と一般解を求めよ．

(3) 微分方程式 $y'' - 3y' - 40y = e^{ax}$ について，$a^2 - 3a - 40 = 0$ の場合の特殊解と一般解を求めよ．

[2] 次の 4×4 行列について考える．

$$A = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 5 & 25 & -1 & 11 \\ 25 & 5 & 11 & -1 \\ -1 & 11 & 5 & 25 \\ 11 & -1 & 25 & 5 \end{pmatrix} \tag{a}$$

$$B = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{b}$$

(1) (b) の右辺を直接計算して，(a) の右辺に等しくなることを示せ．

(2) (b) の右辺は，直交行列 P を用いて，次式に変形できる．

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2 \end{pmatrix}P$$

P を求めよ．

(3) $A^4 - 0.5A^3 - 0.84A^2 + 0.26A + 0.08I$ を求めよ．ただし，I は 4 次の単位行列である．

(4) $\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科（博士課程前期）
量子物質科学プログラム　入学試験問題

2022.8.25

試験科目	基礎科目

[3] x 軸，y 軸，z 軸からなる直交座標系の，x 軸, y 軸および z 軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ および $\boldsymbol{k}$ とする．また，位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が，$\boldsymbol{B}$ を定ベクトルとして $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}$ で定義されている．このとき，$\nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ を求めよ．

(2) xy 平面上にある半径 a の円 $x^2 + y^2 = a^2$ の円周を C とする．(1) のベクトル関数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}$ に対して，線積分 $\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ の値を求めよ．

(3) 原点を中心とする半径 a の球面を S とする．ベクトル関数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k}$ の S に関する面積分 $\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n} dS$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の外向きの法線単位ベクトルである．

(4) 円筒 $x^2 + y^2 = 4$ の側面で，$x \geq 0$, $y \geq 0$ および $0 \leq z \leq 2$ を満たす曲面を S とする。S の法線単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の値を求めよ．ただし，法線単位ベクトルの向きは，円筒内部から見て外向きとする．

(5) ベクトル関数 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ を $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = 2y\boldsymbol{i} + 6xz\boldsymbol{j} + 3x\boldsymbol{k}$ で定義する．(4) で定義した曲面 S 上で、面積分 $\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n} dS$ を実行し，その値を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は (4) で求めた法線単位ベクトルである．