線形代数学 I -ベクトル

向谷 博明

2022 年 7 月 27 日

まえがき

本書は, 広島大学 情報科学部に入学した直後の 4 月上旬から, 6 月上旬 (第 1 ターム) に開講される「線形代数学 I」に関する講義の一部をサマーキャンプの教科書として使用することを目的としたものです. 本来, 使用する教科書は,

久保 富士男 【監修】 栗田 多喜夫 (情報科学部教員), 飯間 信, 河村 尚明【共著】, 専門基礎 線形代数学, 培風館 (2017) [1]

です. しかしながら, 上記の教科書は, 行列から始まるため, 高大接続入試を考慮し, この教科書ではベクトルから始めています. さらに, この教科書で扱われる内容は, オンデマンド講義の第 1 回から第 4 回分に相当します. この教科書の大まかな枠組みは, 文献 [3] を参照しています. この場を借りて, まずは感謝申し上げます.

さて, 高等学校数学において, 現在の過程ではベクトルを「数学 B」で扱います.「平面上のベクトル」から始まり,「空間のベクトル」, さらに, その中で「空間の図形」を修得します. その一方で,「外積」や, 空間における直線や平面の方程式は扱わないなど, 内容が限られています. このサマーキャンプでは, ベクトルの「外積」や, 直線や平面の方程式も扱います. これらの一部は,「数学 B」の教科書によっては,「発展」で扱われていますが, 広島大学の個別学力試験 (前期試験) では範囲外となっています. 直線や平面の方程式, さらには行列は, 過去の高等学校の数学の課程で普通に扱われていました. したがって, 学習するうえで,「年齢」という枠はないものと考えています. すなわち, この教科書で扱われる内容は, 高等学校「数学 I」,「数学 II」を学んでおけば, 基本, 理解できるように記述しています. その他, 大学でのベクトルの表記法を用いることにより, 大学に入学してからもスムーズに学習できるように記述を行っています.

各内容では,「例題」をふんだんに取り入れ, 独学できるように記述しています. さらに関連する問題を「問」の形式で与えています. これらは, ほとんどがオリジナルな問題となっています. または, 一部大学入試問題を改題して作成しています. これらの問を解くことによって, 理解を深めることが期待されます. 簡易な解答も掲載しているので, 自分が作成した解答と比較することも可能です.

この教科書によって, 情報科学部での数学に関連する教科の「マッチング」の重要性を確認するとともに, 将来, 情報科学部で学びたいという意欲が向上することを願っています.

最後に, この教科書を作成するにあたり, 島 唯史 博士には, 本文の校正並びに計算の確認を行なって頂きました. 改めて, 多大なるご協力を賜り, 厚く感謝申し上げます.

2022 年 7 月 27 日 著者

目次

1
ベクトル

1.1 平面ベクトル

1.1.1 平面ベクトルの基礎

高校数学で学習したように, 平面ベクトル $\vec{a}$ は,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

のように実数 a_1, a_2 を用いて成分表示できる. これは, 行ベクトル **(low vector)** とよぶ. 大学において, ベクトルは, 太字で

$$\vec{a} = \boldsymbol{a}$$

のように表記する. 本サマーキャンプでも, 特に断らない限り, 太字で表記する. 大学では, 列ベクトル **(column vector)** といって, 成分は, 下記のように縦に並べて表記する.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

2 つの平面ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

と実数 k に対して, 和と実数倍を

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix},\ k\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$$

と定める. また, すべての成分が 0 であるベクトルを零ベクトル **(zero vector)**

とよぶ. さらに, 平面ベクトル全体のなす集合を

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \middle| x,\ y \in \mathbb{R} \right\}$$

とおく. 平面ベクトル $\vec{a} = \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ の大きさ (長さ) $|\boldsymbol{a}|$ は

$$|\vec{a}| = |\boldsymbol{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

で定義される. 高校数学ではベクトルの大きさは $|\boldsymbol{a}|$ のように絶対値記号を用いて表すことになっているが, これからは実数の絶対値と区別するために, 以下のような記号を用いる.

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

これを大学では, ベクトルのノルム **(norm)** という.

ここで, 大きさが 1 であるベクトルを**単位ベクトル (unit vector)** といい, $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ は, 以下のように定義される.

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

1.1.2 平面ベクトルの内積

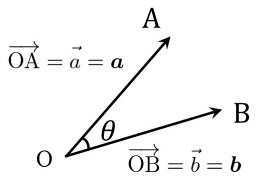


Fig. 1.1

高校数学では, 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, の**内積 (inner product)** は, なす角を θ, $(0 \leq \theta \leq \pi)$ [注 1] として,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$

[注 1] 大学では, 不等式 ≧, ≦ を ≥, ≤ というように, 一本の等号で表記する

として表す. しかしながら, これからは通常の積との混同を避けるために, 大学数学では, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b}$ と表記して, 以下のような記号を用いる.

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta$$

2 つの平面ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

の内積は,

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

である. また, ベクトルは**行列 (matrix)** と見ることも可能なので, そのときには,

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

とも考えられる. ここで, ${}^t\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$ の**転置 (transpose)** とよばれるもので,

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ {}^t\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

として, 定義される.

内積については, 次の基本性質が成り立つことを高校で学習した.

命題 1.1 **（内積の性質）** 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ と実数 k に対して, 以下が成り立つ.

(1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \|\boldsymbol{a}\|^2$.

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$.

(3) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$.

(4) $(k\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

(5) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geq 0$ であり, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = 0$.

例題 1.1 以下の内積に関する結果が成り立つことを示せ.

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{c}\|^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + 2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + 2(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})$$

《解答》 定義に従って計算 (展開) を行う.

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\|^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

$$
\begin{aligned}
&=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c})\\
&=\|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2+\|\boldsymbol{c}\|^2+2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+2(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})
\end{aligned}
$$
□

一方,　垂直条件として, 以下が成り立つ.

命題 1.2（**垂直であるための条件**）　$\mathbf{0}$ でない任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が垂直であるための必要十分条件は,

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$$

となることである. このとき, $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ で表し, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は直交するという.

また, 次の不等式が成り立つことはよく知られている.

命題 1.3（**不等式の性質**）　任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して, 以下の不等式が成り立つ.

(1) (三角不等式) $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|\leq\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|$.
(2) (シュワルツの不等式) $|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|\leq\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$.

《 証明 》 (2) のみ証明を行う.

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

とおけば,

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2\\
&=(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2\\
&=a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2-(a_1^2b_1^2+2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_2^2)\\
&=(a_1b_2-b_1a_2)^2\geq 0
\end{aligned}
$$

また, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\neq 0$ のとき, 等号は, $a_1b_2-a_2b_1=0 \Rightarrow \boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$ のとき, すなわち, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行であるとき成立する.

1.1.3　平面における直線の方程式

平面上の直線は, 通る 1 点と, その直線に平行なベクトルである方向ベクトルを 1 つ決めれば定まる. これを単に,

「<u>直線は, 1 点と方向ベクトルで決まる.</u>」

と今後は解釈する.

例題 1.2 点 (x_0, y_0) を通り, ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ に平行な直線の方程式は $y = m(x - x_0) + y_0 = mx - mx_0 + y_0$ である. 実際, このような直線上の点 (x, y) は**パラメータ (parameter)** t を用いて

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

と表せる. これより, $x = x_0 + t, y = y_0 + mt$ であるから, t を消去すれば直線の方程式が得られる.

注意 1.1 パラメータ t は, **媒介変数**とも呼ばれる.

定義 1.1 (平面における直線のパラメータ表示) 平面における直線上の点を表すベクトル $\boldsymbol{x}$ は, 直線上のある 1 点を表すベクトル $\boldsymbol{x}_0$ と方向を表す**方向ベクトル** $\boldsymbol{v}(= \boldsymbol{0})$ とパラメータ t を用いて

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v}$$

と表せる. このような表示を**直線のパラメータ表示** (**直線の媒介変数表示**) という. あるいは, **直線のベクトル方程式**という.

直線のパラメータ表示 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v}$ に

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

を代入すると

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + tv_1 \\ y_0 + tv_2 \end{pmatrix}$$

となる. これより t を消去すれば

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v_2(x - x_0) = v_1(y - y_0)$$

となるので, $a = v_2$, $b = -v_1$, $c = -v_2 x_0 + v_1 y_0$ とおけば

$$ax + by + c = 0$$

と表せる. つまり平面内の直線の方程式は x と y の 一次方程式となる.

注意 1.2 次節で説明する 3 次元空間では, 区別するために,

$$ax+by+c=0,\ z=0$$

と表記する. すなわち, 3 次元空間では, $ax+by+c=0$ だけでは平面の方程式を表すことに注意が必要である.

問 1.1 2 点 A(2,1), B(1,5) を通る直線のパラメータ表示 (ベクトル方程式) を求めよ.

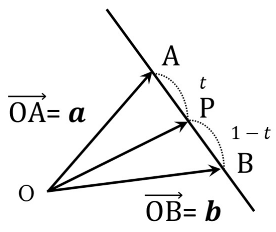


Fig. 1.2

直線のパラメータ表示における別の解釈として, Fig. 1.2 のように, 線分 AB を $t:1-t$, $(0\le t\le 1)$ に内分していると考えれば,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$$

であり, パラメータ表示と一致する.

注意 1.3 $t<0$, $1<t$ まで拡張すれば, 線分 AB から直線 AB を表すことになる. ここで, t を仮に時刻とみなせば, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ は, $t=0$ のとき, 点 A, $t=\dfrac{1}{2}$ のとき, 線分 AB の中点, $t=1$ のとき, 点 B を指すと解釈することが出来る.

注意 1.4 異なる 2 点 $\mathrm{A}(x_1,y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,y_2)$ (ただし, $x_1\ne x_2$ かつ $y_1\ne y_2$) を通る直線が, 高校数学では

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)\ \text{ or }\ y-y_2=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)$$
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\ \text{ or }\ \frac{x-x_2}{x_2-x_1}=\frac{y-y_2}{y_2-y_1}$$

と記述されている. しかし, この表記には, $x_1\ne x_2$, $y_1\ne y_2$ を必要とする. そこで, 方向ベクトル $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\ y_2-y_1\end{pmatrix}$ を導入すれば,

$$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\boldsymbol{v}$$

$$\Leftrightarrow \ \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \ \text{or} \ \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

と表記する方が本質的である.

1.1.4 正射影ベクトル

原点 O とする座標平面上に異なる 2 点 A, B を考える. また, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b}$ とする. ただし, $\angle\mathrm{AOB} = \theta$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする. 点 A から点 O を始点とする半直線 OB に下した垂線と半直線 OB との交点を H とする. このとき, $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \boldsymbol{h}$ を正射影ベクトル **(orthographic projection vector)** という. 正射影ベクトルは, グラム・シュミットの正規直交化法 **(Gram-Schmidt orthonormalization)** で利用される.

例題 1.3 正射影ベクトルが以下で表されることを示せ.

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \boldsymbol{h} = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b}$$

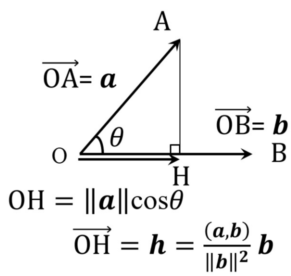


Fig. 1.3

《解答》 まず, $\mathrm{OH} = \|\boldsymbol{a}\|\cos\theta$ である. さらに, $\boldsymbol{b}$ の単位ベクトルに OH 倍すれば良いので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \boldsymbol{h} = \|\boldsymbol{a}\|\cos\theta \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b} = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b} \qquad \square$$

定義 1.2 **(平面上の直線のベクトル方程式)** 平面における直線上の点を表すベクトル $\boldsymbol{x}$ は, 直線上のある 1 点を表すベクトル $\boldsymbol{x}_0$ と直線と垂直なベクトル $\boldsymbol{n}(\neq \boldsymbol{0})$ を用いて

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{n}) = 0$$

と表せる．$\boldsymbol{n}$ をこの直線の法線ベクトルという．

注意 1.5 直線のパラメータ表示 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v}$ をベクトル方程式と呼んだが, $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{n}) = 0$ も直線のベクトル方程式とよぶ.

ベクトル方程式 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{n}) = 0$ に $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を代入すると

$$0 = (x - x_0)a + (y - y_0)b = ax + by - ax_0 - by_0$$

となるので, $c = -ax_0 - by_0$ とおけば

$$ax + by + c = 0$$

と表せる．よって, 平面上の直線も x と y の一次方程式で表したとき, x, y の係数 a, b が直線の法線ベクトルの成分となっていることがわかる．すなわち, $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ である.

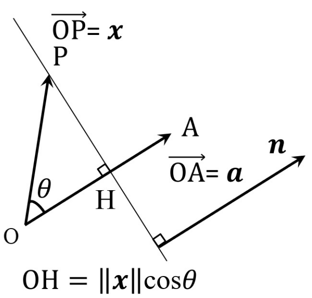


Fig. 1.4

逆に, ベクトル $\boldsymbol{a} \neq 0$ を与えて, $\boldsymbol{a}$ との内積が一定である点 P の軌跡を考える. すなわち, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = C$, ($C$ は定数) であるとき, $\boldsymbol{x}$ の軌跡を求める. Fig. 1.4 において, A を $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}$ にとり, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{x}$ とする.

このとき, $\boldsymbol{x}_0 = \overrightarrow{\mathrm{OH}}$ とすると $\left\|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right\| \cos\theta = \mathrm{OH}$ に着目して,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{a}) &= \left\|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right\| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right\| \cos\theta \\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = C\end{aligned}$$

したがって,

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{a}) = 0$$

となり, $\boldsymbol{a}$ を法線ベクトルに持つ直線を表す.

問 1.2 原点 O とする座標平面を考える. 直線 $y=-x+2$ 上の動点 P, および定点 A(2,2) に対して, 内積 $\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$ が一定であることを示せ.

例題 1.4 △OAB において, OA= 5, OB= 8, AB= 7 とする. △OAB の垂心を H とする. $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \boldsymbol{h}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b}$ を用いて表せ.

《解答》 内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を求める.

$$\begin{aligned} & \mathrm{AB}^2 = \|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 - 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2 \\ \Leftrightarrow\ & 49 = 25 - 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + 64 \\ \Rightarrow\ & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 20 \end{aligned}$$

また, $\boldsymbol{h}$ は実数 s, t を利用して,

$$\boldsymbol{h} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$$

と記述できる. ここで, 直線 AH 上の任意の点 P に対して, 内積 $\left(\boldsymbol{b}, \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)$ は一定である. すなわち,

$$\left(\boldsymbol{b}, \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{h}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

が成り立つ. 同様に, 直線 BH 上の任意の点 Q に対して, 内積 $\left(\boldsymbol{a}, \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)$ も一定である. 以上より,

$$\left(\boldsymbol{a}, \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

最終的に,

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{h})$$

が成り立つ. 以上より,

$$\begin{cases} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) & \Rightarrow\ s\|\boldsymbol{a}\|^2 + t(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & \Rightarrow\ 25s + 20t = 20 \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{h}) & \Rightarrow\ s(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + t\|\boldsymbol{b}\|^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & \Rightarrow\ 20s + 64t = 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (s, t) = \left(\frac{11}{15}, \frac{1}{12}\right)$$

したがって,

$$\boldsymbol{h} = \frac{11}{15}\boldsymbol{a} + \frac{1}{12}\boldsymbol{b} \qquad \square$$

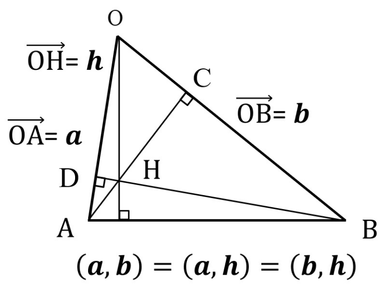


Fig. 1.5

別解として, 正射影ベクトルを利用する. Fig. 1.5 のように 2 点 C, D をとる. 点 C は点 A の正射影, 点 D は点 B の正射影なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b} = \frac{5}{16}\boldsymbol{b}, \ \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a} = \frac{4}{5}\boldsymbol{a}$$

一方, AH:HC=$\alpha : 1-\alpha$, BH:HD=$\beta : 1-\beta$ に内分すると考えれば,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h} &= \alpha\overrightarrow{\mathrm{OC}} + (1-\alpha)\boldsymbol{a} = (1-\alpha)\boldsymbol{a} + \frac{5\alpha}{16}\boldsymbol{b} \\ &= \beta\overrightarrow{\mathrm{OD}} + (1-\beta)\boldsymbol{b} = \frac{4\beta}{5}\boldsymbol{a} + (1-\beta)\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は互いに一次独立なベクトル **(linearly independent vectors)** [注 2]であるので,

$$\left\{ \begin{aligned} 1-\alpha &= \frac{4\beta}{5} \\ \frac{5\alpha}{16} &= 1-\beta \end{aligned} \right. \quad \Leftrightarrow \ (\alpha, \beta) = \left(\frac{4}{15}, \frac{11}{12}\right)$$

したがって,

$$\boldsymbol{h} = (1-\alpha)\boldsymbol{a} + \frac{5\alpha}{16}\boldsymbol{b} = \frac{4\beta}{5}\boldsymbol{a} + (1-\beta)\boldsymbol{b} = \frac{11}{15}\boldsymbol{a} + \frac{1}{12}\boldsymbol{b} \qquad \square$$

[注 2] 互いに $\boldsymbol{0}$ でなく平行でないベクトルを意味する. 正確には, 2 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ に対して, $s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ 満たす実数 (s, t) の組は $s = t = 0$ のみであるとき, ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は一次独立であるという. 一般の n 次元ベクトルに対しては, 「線形代数学 II」で学習する.

注意 1.6 メネラウスの定理より,

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DO}}\cdot\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{HA}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{16}{11}\cdot\frac{1-\alpha}{\alpha}=1 \Rightarrow \alpha=\frac{4}{15}$$

と求めることも可能である.

問 1.3 △OAB において, OA= 4, OB= 3, ∠OAB= $\frac{\pi}{3}$ とする. △OAB の垂心を H とする. $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\boldsymbol{h}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boldsymbol{b}$ を用いて表せ.

1.1.5 平面における円の方程式

平面上の円は, 中心と半径で定まる.

例題 1.5 中心 (a,b), 半径 $r(>0)$ の方程式は $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ である. 実際, このような円周上の点 (x,y) はパラメータ θ, $(0\le\theta<2\pi)$ を用いて

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{pmatrix}$$

と表せる. これより, $x=a+r\cos\theta$, $y=b+r\sin\theta$ であるから, θ を消去すれば円の方程式が得られる. この表示は, 円のパラメータ表示と呼ばれる.

定義 1.3 (円のベクトル方程式) 平面における円周上の点を表すベクトル $\boldsymbol{x}$ は, 中心の位置ベクトル $\boldsymbol{a}$ と半径 r を用いて

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|=r$$

と表せる. このような表示を**円のベクトル方程式**という.

問 1.4 $\|\boldsymbol{x}\|^2-2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})=0$ はどのような図形を描くか.

1.2 空間ベクトル

1.2.1 空間ベクトルの基礎

高校数学では, 平面ベクトルと同様に, 空間ベクトルも学習する. この節では, 特に高校数学の範囲外である**外積 (cross product)** について, 詳細を説明する.

空間ベクトル $\boldsymbol{a}$ は, xyz 空間内で,

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

のように実数 a_1, a_2, a_3 を用いて成分表示できる. 2 つの空間ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

と実数 k に対して, 和と実数倍を

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix},\ k\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$$

と定める. これらは, z 成分が増えた以外, 平面ベクトルの基礎 1.1.1 で定めた演算と全く同様である.

平面ベクトル同様に, 空間ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ のノルム (大きさ) $\|\boldsymbol{a}\|$ は

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

で定義される. また, $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ は, 以下のように定義される.

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

1.2.2　空間ベクトルの内積

平面ベクトル同様に, 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b}$ の内積は, なす角を θ, $(0 \leq \theta \leq \pi)$ として,

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta$$

のように表す. 2 つの空間ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

の内積は,

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

である.

内積については, 平面ベクトル同様, 命題 1.1 が同様に成り立つ.

例題 1.6 空間の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ のなす角 θ, $(0<\theta<\pi)$ を求めよ.

《解答》 良く知られているように, 以下の公式が成り立つ.

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$$

したがって,

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \frac{1}{2}$$

したがって, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. □

問 1.5 実数 t に対して, 3 点 $\mathrm{A}(2,4,0)$, $\mathrm{B}(0,2,0)$, $\mathrm{P}(0,4-t^2,2t)$ を定める. このとき, $\angle\mathrm{BAP}$ を求めよ. (1987 大阪大学 (改題))

1.2.3 外積

2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boldsymbol{b}$, の外積 **(cross product)** を定義する.

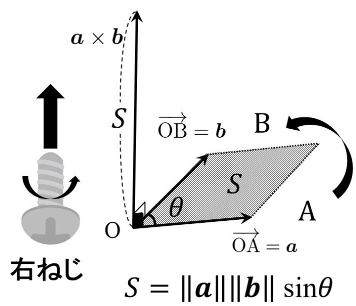


Fig. 1.6

定義 1.4（外積） 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b}$ の外積を

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

と記述する. このとき,

(0) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の少なくとも一方が $\boldsymbol{0}$ のとき, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$ と定める.

(1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ がともに $\boldsymbol{0}$ でないとき, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方に垂直なベクトルである. その向きは, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の順で右手系となる. すなわち, 点 A から点 B に向かうように回したとき, ねじが進む方向である.

(2) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の大きさ $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|$ は, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ, $(0 \leq \theta \leq \pi)$ として,

$$\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \sin\theta \tag{1.1}$$

(3) 2 つの空間ベクトル

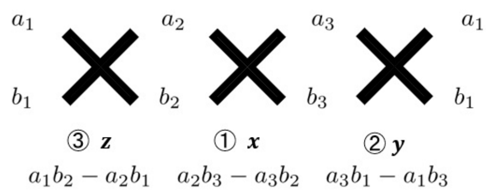
$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

の外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の成分表示は,

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

である.

注意 1.7 外積の計算は, 以下のように覚えておくと便利である.



命題 1.4（外積の性質） 任意の空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ と実数 k に対して, 以下が成り立つ.

(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0$.

(2) $\left(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right)\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}\times\left(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\right)=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.

(3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

(4) $(k\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(k\boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

注意 1.8 (3) は要注意である. すなわち, 外積の交換法則は成り立たず, 順番を変更すると, 向きが逆になる.

次に, 具体的な例題を通して, 性質を確認する.

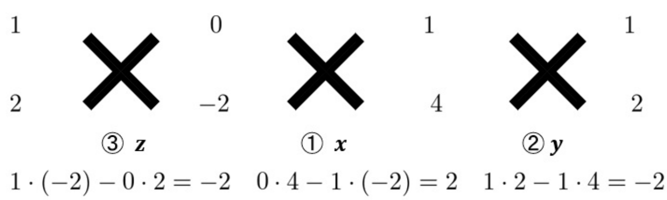
例題 1.7 3 点 A(1,1,4), B(2,1,5), C(3,−1,8) であるとき, △ABC の面積 S を求めよ.

《解答》 外積の性質 (1.1) を利用する. すなわち, AB, AC を 2 辺とする平行四辺形の面積の $\dfrac{1}{2}$ が S であることを利用する. まず, 2 辺を表すベクトルは,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}$$

したがって, 面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\|\sin\theta=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|=\frac{1}{2}\left|2\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{3}$$ □



注意 1.9 高校数学では, 空間内の △ABC の面積 S は, 以下の公式を利用する.

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2} \tag{1.3}$$

これを利用すれば,

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}^2\cdot(2\sqrt{6})^2-6^2}=\sqrt{3}$$

と求めることが出来る. しかしながら, 以下の問題

「実数 x に対して, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} x \\ x+1 \\ x-1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} x-1 \\ x \\ x+1 \end{pmatrix}$ であるとき, $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積 S の最小値を求めよ.」

では, 外積の利用が圧倒的に有利になる. 実際,

$$S = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} 3x+1 \\ -3x+1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{18x^2+3}$$

より, $x=0$ のとき, 最小値 $S \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ をとることが容易に示される.

問 1.6　3 点 $\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{P}(1,0,a)$, $\mathrm{Q}(0,2,b)$ であるとき, $\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積 S を a, b を用いて表せ.

例題 1.8　2 つの空間ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の両方に垂直な大きさ 1 のベクトル $\boldsymbol{e}$ を求めよ.

《解答》　外積の計算式 (1.2) を利用する.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 0 & & -2 & & 1 \\ & \times & & \times & & \times & \\ -2 & & 1 & & 1 & & -2 \\ & \text{③}\ \boldsymbol{z} & & \text{①}\ \boldsymbol{x} & & \text{②}\ \boldsymbol{y} & \end{array}$$

$$1\cdot 1 - 0\cdot(-2) = 1 \quad 0\cdot 1 - (-2)\cdot 1 = 2 \quad (-2)\cdot(-2) - 1\cdot 1 = 3$$

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 - (-2)\cdot 1 \\ (-2)\cdot(-2) - 1\cdot 1 \\ 1\cdot 1 - 0\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ここで, 内積 $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}) = 0$, $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}) = 0$ より, 確かに垂直になっている. したがって, 求めるベクトル $\boldsymbol{e}$ は,

$$\boldsymbol{e} = \pm\frac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|} = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

問 1.7 2 つの空間ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ.

1.2.4 スカラー三重積

以下のような平行六面体の体積 V を求めよう.

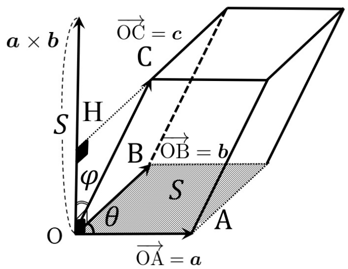


Fig. 1.7

Fig. 1.7 より, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を S として,

$$\begin{aligned} V &= S \cdot \mathrm{OH} = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta \cdot \|\boldsymbol{c}\||\cos\phi| = \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| \cdot \|\boldsymbol{c}\||\cos\phi| \\ &= \left|\left(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\right)\right| \end{aligned}$$

で与えられる. 特に, $\left(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\right)$ をスカラ三重積 **(scalar triple product)** という. 後に扱う行列式 **(determinant)** を利用すれば,

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

として,

$$\begin{aligned} \left(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\right) &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - (a_3 b_2 c_1 + a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3) \end{aligned}$$

例題 1.9　4 点 $\mathrm{A}(1,-1,3)$, $\mathrm{B}(2,1,0)$, $\mathrm{C}(1,-1,5)$, $\mathrm{D}(-3,1,2)$ であるとき, 四面体 ABCD の体積 V を求めよ.

《解答》　スカラ 3 重積を利用する. すなわち, AB, AC, AD を 3 辺とする並行六面体の体積の $\dfrac{1}{6}$ が V であることを利用する. まず, 3 辺を表すベクトルは,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

したがって, 体積 V は,

$$V = \frac{1}{6}\left|(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})\right| = \frac{1}{6}\left|\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\right| = \frac{10}{3}$$

□

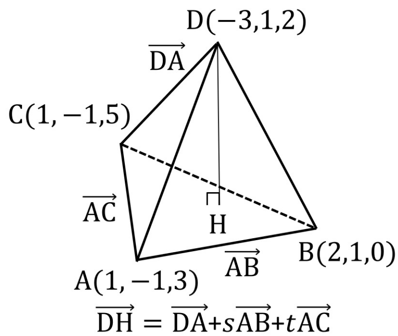


Fig. 1.8

注意 1.10　高校数学の範囲で解くのであれば, 以下の手順となる. まず, △ ABC の面積を (1.3) によって計算する. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ なので,

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2} = \sqrt{5}$$

一方, 頂点 D から △ ABC へ下した垂線の足を $\mathrm{H}(x, y, z)$ とすれば, 2 つの実数 s, t を利用

して,

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\overrightarrow{\mathrm{DA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+s\\-2+2s\\1-3s+2t\end{pmatrix}$$

のように表現される[注3]. ここで, $\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ は, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}4+s\\-2+2s\\1-3s+2t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}=14s-6t-3=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}4+s\\-2+2s\\1-3s+2t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}=2(1-3s+2t)=0$$

これらを解いて, $s=0$, $t=-\dfrac{1}{2}$ を得る. したがって, $\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}$. すなわち, $\left\|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right\|=2\sqrt{5}$.

以上より, 求める体積 V は,

$$V=\frac{1}{3}\left\|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right\|\times\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{3}\cdot2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=\frac{10}{3} \qquad \square$$

このように, 大変な計算を強いられる.

問 1.8 4 点 A(2,1,2), B(2,3,6), C(3,6,2) であるとき, 四面体 OABC の体積 V を求めよ.

1.2.5 ベクトル三重積

3 つの空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して,

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

をベクトル三重積 **(vector triple product)** という.

命題 1.5 （ベクトル三重積の性質） 任意の空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して, 以下が成り立つ.

(1) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

(2) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

《証明》 (1) のみ示す. 2 つの空間ベクトル

$$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

[注3] これは, 後程扱われる空間内の平面のベクトル方程式である.

の外積は,

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} b_2c_3-b_3c_2 \\ b_3c_1-b_1c_3 \\ b_1c_2-b_2c_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

である. したがって,

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{pmatrix} a_2d_3-a_3d_2 \\ a_3d_1-a_1d_3 \\ a_1d_2-a_2d_1 \end{pmatrix}$$

ここで, 各成分を計算すれば,

$$\begin{aligned}
a_2d_3-a_3d_2 &= a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_3c_1-b_1c_3) \\
&= (a_2c_2+a_3c_3)b_1-(a_2b_2+a_3b_3)c_1 \\
&= (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_1-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_1 \\
&= (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})b_1-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})c_1 \\
a_3d_1-a_1d_3 &= a_3(b_2c_3-b_3c_2)-a_1(b_1c_2-b_2c_1) \\
&= (a_1c_1+a_3c_3)b_2-(a_1b_1+a_3b_3)c_2 \\
&= (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_2-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_2 \\
&= (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})b_2-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})c_2 \\
a_1d_2-a_2d_1 &= a_1(b_3c_1-b_1c_3)-a_2(b_2c_3-b_3c_2) \\
&= (a_1c_1+a_2c_2)b_3-(a_1b_1+a_2b_2)c_3 \\
&= (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_3-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_3 \\
&= (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})b_3-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})c_3
\end{aligned}$$

よって証明が完了する. □

1.2.6　空間における直線の方程式

平面上の直線同様, 直線上の 1 点と, 方向ベクトルが決まれば 1 つに定まる.

定義 1.5（空間における直線のパラメータ表示）　空間における直線上の点を表すベクトル $\boldsymbol{x}$ は, 直線上のある 1 点を表すベクトル $\boldsymbol{x}_0$ と方向を表す方

向ベクトル $\boldsymbol{v}(\neq \boldsymbol{0})$ とパラメータ t を用いて

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

と表せる.

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ として, 定義より t を消去すれば

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

と記述されている. しかし, この表記には, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ を必要とする.

問 1.9 2 点 A$(-1,1,0)$, B$(0,-1,1)$ を通る直線のパラメータ表示を求めよ. さらに, 直線の方程式を求めよ.

例題 1.10 点 A$(2,1,6)$ から, 直線 $\dfrac{x-5}{-2} = \dfrac{y}{3} = z-1$ へ下した垂線の足を H とする. 点 H を求めよ.

《解答》 点 H は直線上にあるので, パラメータ t を導入し,

$$\frac{x-5}{-2} = \frac{y}{3} = z-1 = t$$

とおくことにより,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \begin{pmatrix} -2t+5 \\ 3t \\ t+1 \end{pmatrix}$$

このとき, $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ と直線の方向ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ が垂直なので,

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AH}}, \boldsymbol{v}\right) = \left(\begin{pmatrix} -2t+3 \\ 3t-1 \\ t-5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 14t - 14 = 0 \Rightarrow t = 1$$

したがって, H(3,3,2). □

別解として, $\left\|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right\|^2$ が最小となるとき, 題意を満たす.

$$\left\|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right\|^2 = (-2t+3)^2 + (3t-1)^2 + (t-5)^2 = 14(t-1)^2 + 21$$

したがって, $t=1$ のとき最小となる. このとき, H(3,3,2) かつ最小値は $\sqrt{21}$ である. □

問 1.10　2 点 A(2,1,0), B(1,1,1) を通る直線 ℓ 上に動点 P をとる. 線分 OP の最小値を求めよ.

例題 1.11　A(1,0,1), B(0,−1,0) を通る直線 ℓ と C(−1,0,3), D(−4,−1,4) を通る直線 m が 1 点で交わることを示し, その交点を求めよ.

《解答》　直線 AB, 直線 CD は, それぞれパラメータ s, t を利用して,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-s \\ -s \\ 1-s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-3t \\ -t \\ 3+t \end{pmatrix}$$

もし交点が存在するなら,

$$\begin{pmatrix} 1-s \\ -s \\ 1-s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-3t \\ -t \\ 3+t \end{pmatrix}$$

が全て成り立つ. そこで, x 成分 y 成分に着目し,

$$\begin{cases} 1-s = -1-3t \\ -s = -t \end{cases} \Rightarrow\ (s,t) = (-1,-1)$$

これは, z 成分 $1-s=3+t=2$ を満たす. したがって, 交点が存在し, その交点は, (2,1,2). □

例題 1.12 直線 ℓ : $x+y=-1,\ z=0$ 上に動点 P, 直線 m : $x=y=-\dfrac{z-2}{2}$ 上に動点 Q がある. 線分 PQ の最小値を求めよ.

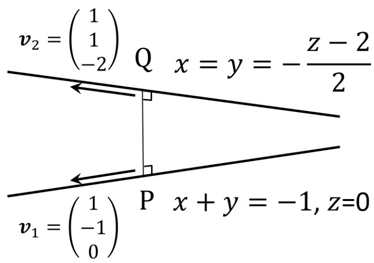


Fig. 1.9

《解答》 動点 P, 動点 Q は, それぞれパラメータ s, t を利用して,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}s\\-s-1\\0\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}t\\t\\-2t+2\end{pmatrix}$$

線分 PQ が最小となるには, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が直線 ℓ, m のそれぞれの方向ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ に対し, 共に垂直となるときである. したがって,

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{PQ}},\boldsymbol{v}_1\right)=\left(\begin{pmatrix}t-s\\t+s+1\\-2t+2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)=-2s-1=0\ \Rightarrow\ s=-\frac{1}{2}$$

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{PQ}},\boldsymbol{v}_2\right)=\left(\begin{pmatrix}t-s\\t+s+1\\-2t+2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right)=6t-3=0\ \Rightarrow\ t=\frac{1}{2}$$

このとき, $\left\|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right\|=\sqrt{3}$. □

別解として, $\left\|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right\|^2$ が最小となるとき, 題意を満たす.

$$\left\|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right\|^2=(t-s)^2+(t+s+1)^2+(-2t+2)^2=2\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+6\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+3$$

したがって, $s=-\dfrac{1}{2}$, $t=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\sqrt{3}$ をとる. □

例題 1.13　点 A$(1,-1,0)$ を通り, 直線 ℓ : $x=y=z$ と交点を持ち, かつ $\dfrac{\pi}{3}$ のなす角を持つ直線の方程式を求めよ.

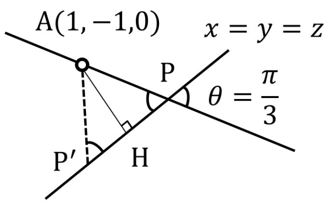


Fig. 1.10

《解答》 Fig. 1.10 のように記号を取る. まず, 点 A から直線 ℓ に下した垂線の足 H を求める. 点 H は直線 ℓ 上にあるので, パラメータ t を導入し, $x=y=z=t$ とおくことにより,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\begin{pmatrix}t\\t\\t\end{pmatrix}$$

このとき, $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ と直線の方向ベクトル $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ が垂直なので,

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AH}},\boldsymbol{v}\right)=\left(\begin{pmatrix}t-1\\t+1\\t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=3t=0\ \Rightarrow\ t=0$$

したがって, H$(0,0,0)$. また, $\left\|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right\|=\sqrt{2}$. さらに, Fig. 1.10 より, $\left\|\overrightarrow{\mathrm{HP}}\right\|=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. 以上より, 点 P は,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HP}}=\overrightarrow{\mathrm{HP}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

ただし, Fig. 1.10 にあるように, P’ も考えられるので, 「±」を考えている.

最終的に, 求める直線は, 点 A を通り, 方向ベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の直線である. すなわち,

$$\frac{x-1}{\pm\sqrt{2}-3} = \frac{y+1}{\pm\sqrt{2}+3} = \frac{z}{\pm\sqrt{2}} \qquad \square$$

ただし, 複号同順である.

注意 1.11 別解として, 座標設定による方法を考える. 点 P をパラメータ表示すれば, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ s \end{pmatrix}$ このとき, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と直線の方向ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が $\dfrac{\pi}{3}$ の角をなすので,

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \frac{\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}, \boldsymbol{v}\right)}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right\|\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{3s}{\sqrt{3s^2+2}\cdot\sqrt{3}} \Rightarrow s = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}$$

したがって, 方向ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = {}^t\!\begin{pmatrix} \pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}-1 & \pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}+1 & \pm\dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \pm\sqrt{2}-3 \\ \pm\sqrt{2}+3 \\ \pm\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

を得る.

問 1.11 点 A(2, 1, 0) を直線 ℓ : $x = y = z$ を軸として $\dfrac{\pi}{2}$ 回転した座標を求めよ.

1.2.7 空間における平面の方程式

この節では, 平面の方程式を導出する. まず, 注意 1.10 で利用した空間における平面のパラメータ表示を紹介する.

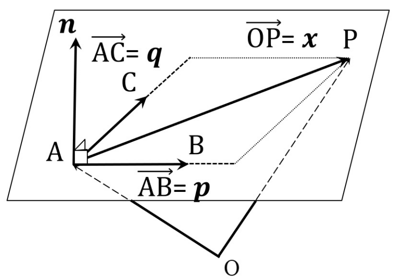


Fig. 1.11

定義 1.6（空間における平面のパラメータ表示） 空間における平面上の点 P を表すベクトル $\boldsymbol{x}$ は, 平面上のある 1 点を表すベクトル $\boldsymbol{x}_0$ と平面上にある 2 つの一次独立なベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}(\neq \boldsymbol{0})$ とパラメータ s, t を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q} \end{aligned} \tag{1.4}$$

と表せる．このような表示を空間における平面のパラメータ表示という.

平面のベクトル方程式 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q}$ に

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

を代入して, さらに, $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ の両方に垂直なベクトル $\boldsymbol{n}$, すなわち, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ を考慮すると, $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{q}) = 0$ なので,

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = (\boldsymbol{n}, s\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q}) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \right) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \end{aligned}$$

となる. したがって, $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ とおけば

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{1.5}$$

と表せる. つまり空間内の平面の方程式は x, y, および z の 一次方程式となる.

先の結果から, 容易に以下の定義を述べることが出来る.

定義 1.7（空間内の平面のベクトル方程式） 空間における平面上の点を表すベクトル $\boldsymbol{x}$ は，平面上のある 1 点を表すベクトル $\boldsymbol{x}_0$ と平面と垂直なベクトル $\boldsymbol{n}(\neq \boldsymbol{0})$ を用いて

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0$$

と表せる. $\boldsymbol{n}$ をこの平面の法線ベクトルという. このとき, 平面上の点 (x_0, y_0, z_0), および法線ベクトル $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に対して,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{1.6}$$

と記述できる.

問 1.12 点 A(2,1,1) を通り, 法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ である平面の方程式を求めよ.

例題 1.14 3 点 A(2,1,−1), B(1,0,1), C(−2,1,1) を通る平面の方程式を求めよ.

《解答》 平面の方程式に関して, 平面上の直線の決定同様に (定義 1.2 参照),

「<u>平面は, 1 点と法線ベクトルで決まる.</u>」

したがって, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直なベクトル $\boldsymbol{n}$ を外積によって求め, (1.6) によって, 平面の方程式を計算する. この方針によれば,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を求め, 次に垂直関係を求めればよい. 計算を簡単にするために, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ に平行であることを利用して, 求める平面の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は,

$$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

以上より,

$$1 \cdot (x - 2) + 3(y - 1) + 2(z + 1) = 0 \ \Leftrightarrow \ x + 3y + 2z = 3 \qquad \square$$

注意 1.12 別解として, 求める平面の方程式を

$$ax + by + cz + d = 0$$

とおき, 3 点 A(2, 1, −1), B(1, 0, 1), C(−2, 1, 1) を代入すれば,

$$\begin{cases} 2a+b-c+d=0 & \text{(i)} \\ a+c+d=0 & \text{(ii)} \\ -2a+b+c+d=0 & \text{(iii)} \end{cases}$$

を満足する. これは, 4 元連立一次方程式なので, $a:b:c:d$ を求めることが目標となる[注4]. (i)+(Iii) より, $b+d=0$. (i) に代入して, $2a-c=0$. (ii) より, $3a+d=0$. 以上より,

$$a:b:c:d = a:3a:2a:-3a = 1:3:2:-3 \quad a \neq 0$$

以上より $x+3y+2z=3$ を得る. この方法は, 一番簡易的であるが, 方程式を解く必要性から時間がかかることが難点である.

問 1.13 3 点 A(0, 1, −1), B(1, 2, 1), C(2, 1, 0) を通る平面の方程式を求めよ.

問 1.14 点 A(1, 1, 0) を通り, 直線 $x=2(y-1)=z$ を含む平面の方程式を求めよ.

問 1.15 2 直線 $x=y=z-1$, $x+1=y-2=z-2$ の両方を含む平面の方程式を求めよ.

問 1.16 2 直線 $x-1=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{3}$, $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y}{2}=z-2$ が 1 点で交わることを示し, その両方を含む平面の方程式を求めよ.

例題 1.15 2 平面 $x-y+z=1$, $2x+y-z=2$ の交線の方程式を求めよ.

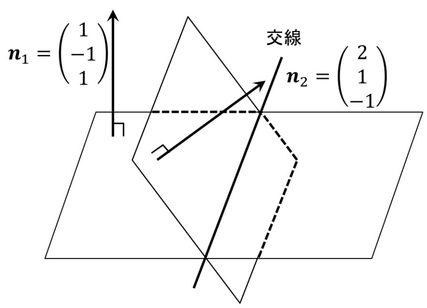


Fig. 1.12

《解答》 まず, 交線を通る点を求める必要がある. とりあえず $z=0$ とすれば, $x-y=1$, $2x+y=2$ となり, これを解けば, (1, 0, 0) を得る. 次に, 方向ベクトル

[注4]実際, 線形代数学 I で詳細を説明する

は, 平面の法線ベクトル $\boldsymbol{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ の両方に垂直である. したがって, 外積により, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を得る. 以上より,

$$x = 1,\ y = z \qquad \square$$

注意 1.13 $z = 0$ でとりあえず交線上の点を求めたが, 場合によっては, $y = 0$ や $z = 0$ としても良い.

$x-y+z=1$, $2x+y-z=2$ から 2 式を足して, $x=1$. これより, 平面に戻して, $-y+z=0$ を得る. これは, 直線を表す.

問 1.17 2 平面 $x+y+z=0$, $2x+y-z=2$ の交線の方程式を求めよ.

定義 1.8 空間内の点 $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$ から平面 α : $ax+by+cz+d=0$ に下ろした垂線の足を H とおくとき，線分 AH の長さを点 A と平面 α の距離と定義する.

このとき, 点 $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$ から平面 α : $ax+by+cz+d=0$ の距離 L は

$$L = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

で与えられる.

《証明》 垂線の足 $\mathrm{H}(x_1, y_1, z_1)$ は, 点 $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$ 通り, 方向ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に持つ直線上にあるので,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0+at \\ y_0+bt \\ z_0+ct \end{pmatrix}$$

一方, 点 H は, 平面 α 上にあるので, 代入して,

$$a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c(z_0+ct)+d=0$$
$$\Rightarrow t = t_1 = -\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$$

したがって,

$$\begin{pmatrix} x_1-x_0 \\ y_1-y_0 \\ z_1-z_0 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad \square$$

1.2.8 空間における球面の方程式

空間内の球面は, 平面上の円と同様に, 中心と半径で定まる.

例題 1.16 中心 $(a, b.c)$, 半径 $r(>0)$ の球面方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2$$

である. 実際, このような球面上の点 (x, y, z) はパラメータ θ, ϕ, $(0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi < 2\pi)$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

と表せる. これより, $x = a + r\sin\theta\cos\phi$, $y = b + r\sin\theta\sin\phi$, $z = c + r\cos\theta$ であるから, θ, ϕ を消去すれば球面の方程式が得られる.

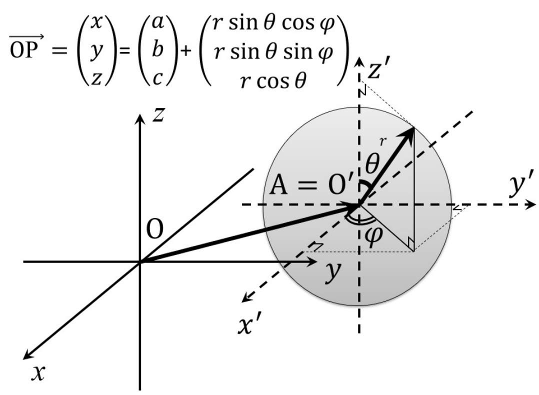


Fig. 1.13

例題 1.17 球面 $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=6$ と直線 $x-1=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$ の交点を求めよ.

《解答》 まず, 直線上の点 P をパラメータ表示すれば,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t+1\\-2t+2\\-t+3\end{pmatrix}$$

点 P が球面上にあるので代入して,

$$t^2+(-2t+3)^2+(-t+3)^2=6 \Leftrightarrow t^2-3t+2=(t-1)(t-2)=0 \Leftrightarrow t=1,\ 2$$

したがって, $t=1$ のとき $(2,0,2)$, $t=2$ のとき, $(3,-2,1)$. □

問 1.18 球面 $x^2+y^2+(z-1)^2=11$ と直線 $x-2=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{-2}$ の交点を求めよ.

例題 1.18 球面 $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z-11=0$ と平面 $x-2y+2z=1$ がある. 球面と平面の交わりの円の中心と半径を求めよ.

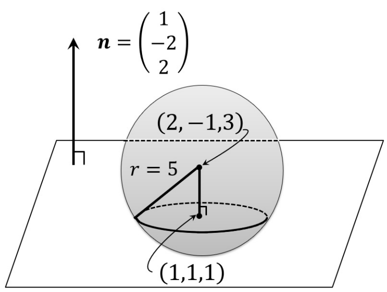


Fig. 1.14

《解答》 $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=5^2$ と変形できるので, 中心が $(2,-1,3)$, 半径 $r=5$ の球面を表す. 円の中心の座標は, 中心 $(2,-1,3)$ を通り, 平面の法線ベクトルを方向ベクトル $\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ にもつ直線と平面の交点であるので, 円の中心

をパラメータ表示すれば,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t+2\\-2t-1\\2t+3\end{pmatrix}$$

この点が平面上にあるので代入して,

$$t+2-2(-2t-1)+2(2t+3)=1 \Leftrightarrow t=-1$$

したがって, 円の中心は, $(1,1,1)$. また, 中心 $(2,-1,3)$ から平面 $x-2y+2z=1$ までの距離 L は,

$$L=\frac{|2+(-2)\cdot(-1)+6-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=3$$

以上から, 円の半径 R は, $R=\sqrt{5^2-3^2}=4$. □

注意 1.14　球面の中心 $(2,-1,3)$ と 円 $(1,1,1)$ の中心との距離として,

$$L=\sqrt{(2-1)^2+(-1-1)^2+(3-1)^2}=3$$

として計算しても良い.

問 1.19　球面 $x^2+y^2+z^2=1$ と平面 $x+y+z=1$ がある. 球面と平面の交わりの円の中心と半径を求めよ.

例題 1.19　4 点 $\mathrm{A}(2,2,0)$, $\mathrm{B}(2,0,4)$, $\mathrm{C}(-1,2,1)$, $\mathrm{D}(3,2,3)$ を通る球面の方程式を求めよ.

《解答》　求める球面の方程式を

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

とおく. 4 点を通るので 代入すれば,

$$\begin{cases}2a+2b+d=-8\\2a+4c+d=-20\\-a+2b+c+d=-6\\3a+2b+3c+d=-22\end{cases} \tag{1.7}$$

となる. これらを解いて, $(a,b,c,d)=(-2,-2,-4,0)$. 以上より,

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z=0$$ □

問 1.20 4 点 A(−2, 8, −1), B(−2, 5, 6), C(0, −2, 1), D(3, 3, 3) を通る球面の方程式を求めよ.

通常, 高等学校において, 4 元連立一次方程式 (1.7) を解くことは, 機械的な計算になるので, 議論されることはめったにない. しかしながら, 線形代数学では, 単元として「連立一次方程式」が存在する. 実際, オンデマンド講義では, この単元を含む. ここでは, 連立一次方程式をコンピュータによって求めることを仮定して, **掃き出し法 (sweep-out method/row reduction)** 注 5について説明する.

まず, 以下の簡単な 3 元連立一次方程式を掃き出し法によって解く.

$$\begin{cases} x+y-2z=3 & \text{(i)} \\ -x+y+z=0 & \text{(ii)} \\ 2x-y-z=3 & \text{(iii)} \end{cases}$$

掃き出し法の基本は,

「方程式の定数倍を他の方程式に加えても変わらない」

性質を利用する. すなわち, (ii)+(i) や, (iii)-(i)×2 等の操作を行う.

$$\begin{cases} & x+y-2z=3 & \text{(i)} \\ \text{(ii)}+\text{(i)} & 0x+2y-z=3 & \text{(ii)}' \\ \text{(iii)}-\text{(i)}\times 2 & 0x-3y+3z=-3 & \text{(iii)}' \end{cases}$$

次に, (ii)′ を全体 2 で割って, 以下の操作を行なう.

$$\begin{cases} \text{(i)}-\text{(ii)}'' & x+0y-\frac{3}{2}z=\frac{3}{2} & \text{(i)}'' \\ \text{(ii)}'\times\frac{1}{2} & 0x+y-\frac{1}{2}z=\frac{3}{2} & \text{(ii)}'' \\ \text{(iii)}'+\text{(ii)}''\times 3 & 0x+0y+\frac{3}{2}z=\frac{3}{2} & \text{(iii)}'' \end{cases}$$

引き続き, (iii)″ を全体 $\frac{3}{2}$ で割って, 以下の操作を行なう.

$$\begin{cases} \text{(i)}''+\text{(iii)}'''\times\frac{3}{2} & x+0y+0z=3 & \text{(i)}''' \\ \text{(ii)}''+\text{(iii)}'''\times\frac{1}{2} & 0x+y+0z=2 & \text{(ii)}''' \\ \text{(iii)}''\times\frac{2}{3} & 0x+0y+z=1 & \text{(iii)}''' \end{cases}$$

以上より, $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ を得る. これを形式的に以下のように記述する.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

注 5 ガウスの消去法 (Gaussian elimination) とも呼ばれる.

$$
\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]
$$

ここで, 一番右側が解を表している.

最後に, 掃き出し法によって, (1.7) を解く.

$$
\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 0 & 1 & -8 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & -20 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & -6 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & -22 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & -12 \\ 0 & 3 & 1 & \frac{3}{2} & -10 \\ 0 & -1 & 3 & -\frac{1}{2} & -10 \end{array}\right]
$$

$$
\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & -10 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & \frac{3}{2} & -28 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & -10 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{14} & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -4 \end{array}\right]
$$

$$
\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{14} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{7} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{14} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{7} & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]
$$

ここで, 一番右側にある $(a,b,c,d) = (-2,-2,-4,0)$ が解を表している. □

注意 1.15 連立一次方程式を考える場合, 未知数が方程式の数より多い場合が存在する. 例えば, 例題 1.15 では, $x-y+z=1$, $2x+y-z=2$ を 2 平面と解釈したが, これを未知数が x, y, z の 3 つに対して, 方程式の数が 2 つである連立一次方程式と考えることができる. 多少一般化して, 以下の問題を考える.

a を定数とする. 連立一次方程式 $x-y+z=1$, $2x+y+az=2$ を解け.

掃き出し法によって解く. 簡易的に表現すれば,

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & a-2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{a+1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{a-2}{3} & 0 \end{array}\right]
$$

これは,

$$
\begin{cases} x + \dfrac{a+1}{3} z = 1 \\ y + \dfrac{a-2}{3} z = 0 \end{cases}
$$

と同値である. したがって,

(i) $a=-1$ のとき, $x=1$, $y=z$. これは, 例題 1.15 と同じ結果である.
(ii) $a=2$ のとき, $x+z=1$, $y=0$.
(ii) $a\neq-1$ かつ $a\neq 2$ のとき,

$$\frac{x-1}{-a-1}=\frac{y}{-a+2}=\frac{z}{3} \tag{1.8}$$

となる.

(i), (ii), (iii) いずれも幾何学的に見れば直線を表す. 一方, 連立一次方程式と考えれば, 未知数が多い場合, z をパラメータとして, 解 x, y がパラメータ表現されることを意味する. これらもオンデマンド講義で扱う. ちなみに, 外積を利用すれば, 2 平面の法線ベクトル $\boldsymbol{n}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{n}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\a\end{pmatrix}$ の両方に垂直であるベクトルの一つとして, $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}-a-1\\-a+2\\3\end{pmatrix}$ を得る. これは, (1.8) で表される直線の方程式における方向ベクトルと一致している.

定義 1.9（球面のベクトル方程式） 空間内における球面上の点を表すベクトル $\boldsymbol{x}$ は, 中心の位置ベクトル $\boldsymbol{a}$ と半径 r を用いて

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|=r$$

と表せる．このような表示を**球面のベクトル方程式**という.

例題 1.20 xyz 空間において, $\left\|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right\|=1$,

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}},\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)^2+\left\|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}},\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right\|^2=1$$

を満たすとき, 点 P の軌跡を求めよ. (2009 神戸大学 (改題))

《解答》 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{a}$ とおく. ただし, $\|\boldsymbol{a}\|=1$ である. このとき,

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a})^2+\|\boldsymbol{p}-(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}\|^2=1\\
&\Rightarrow (\boldsymbol{p},\boldsymbol{a})^2+\|\boldsymbol{p}\|^2-2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a})^2+(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a})^2\|\boldsymbol{a}\|^2=1\\
&\Rightarrow \|\boldsymbol{p}\|^2=1 \Leftrightarrow \|\boldsymbol{p}\|=1
\end{aligned}$$

したがって, 原点中心半径 1 の球面を表す. □

問 1.21 1 辺の長さが 2 である正四面体 ABCD に内接する球面上に点 P をとる. このとき, 以下の値が一定であることを示せ.

$$L=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{DP}}|^2$$

1.2.9 空間における円のパラメータ表示

球面と平面の交わりは円となるが, そのパラメータ表示は, 空間における平面のパラメータ表示 (1.4) を制限した形式で表現できる. 具体的に,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + r\cos\theta\, \boldsymbol{p} + r\sin\theta\, \boldsymbol{q},\ \ \|\boldsymbol{p}\| = \|\boldsymbol{q}\| = 1,\ \ (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = 0,\ 0 \le \theta < 2\pi \quad (1.9)$$

であれば, 空間で中心が (x_0, y_0, z_0), 半径 r の円周を表す. ここで, 平面のパラメータ表示 (1.4) において, $s = r\cos\theta$, $t = r\sin\theta$ より, $s^2 + t^2 = 1$ という制限が加わる.

例題 1.21 空間内の点 P (x, y, z) が $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$ を満たすとき, 定点 A(1, 0, 0) までの距離 AP の最小値を求めよ.

《 解答 》 この交わりの図形は, 明らかに原点中心, 半径 1 の円周である. また, 円周上の点 P は, (1.9) によって, パラメータ $0 \le \theta < 2\pi$ を利用して, 以下のように表現できる.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos\theta\, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin\theta\, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\cos\theta}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sin\theta}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ただし, (1.7) のベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ の選び方は, まず, 対称性を考えて, もっとも簡単なもので, $\boldsymbol{p} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が選択できる. 次に, 平面の法線ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{p}$ の両方に垂直な単位ベクトルとして, 外積を利用して, $\boldsymbol{q} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ を選択している.

したがって,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\cos\theta}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sin\theta}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

なので,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 &= 1 + \cos^2\theta + \sin^2\theta - \frac{2}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{2}{\sqrt{6}}\sin\theta \\ &= 2 - 2\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right) \end{aligned}$$

となり, 最小値は, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき $\sqrt{2 - 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}}$ である. □

1.3 n 次元ベクトル

1.3.1 n 次元ベクトルの基礎

n 個の実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の組を縦に並べて書いた

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

を n 次元ベクトルとよぶ. 2 つの n 次元ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

と実数 k に対して, 和と実数倍を

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \ k\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$$

と定める. これらは, 今まで説明してきた平面ベクトルや空間ベクトルの基礎 1.1.1, 1.2.1 で定めた演算と全く同様である.

平面ベクトル同様に, n 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ のノルム $\|\boldsymbol{a}\|$ は

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$$

によって定義される.

1.3.2　n 次元ベクトルの内積

$\mathbb{R}^n$ の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積は,

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

であるとき,

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

である[注 6]. 一般の $\mathbb{R}^n$ における列ベクトルについても, 命題 1.1 が同様に成り立つ.

命題 1.6（**不等式の性質**）　任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して, 以下の不等式が成り立つ.

(1) (三角不等式) $\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$.

(2) (シュワルツの不等式) $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leq \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\|$.

注 6 $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ である.

《 **証明** 》 (2) のみ証明を行う.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とおけば, 任意の実数 t に対して,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k t + b_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) t^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) t + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$
$$= \|\boldsymbol{a}\|^2 t^2 + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\, t + \|\boldsymbol{b}\|^2 \geq 0$$

ここで, $\|\boldsymbol{a}\| = 0$ のときは, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ で成立する. 一方, $\|\boldsymbol{a}\| \neq 0$ のときは, t に関する 2 次不等式と考えると, 判別式は 0 以下でなければならない.

$$\frac{D}{4} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 - \|\boldsymbol{a}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{b}\|^2 \leq 0$$
$$\Rightarrow \left|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\right| \leq \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \qquad \square$$

また, 等号は, $\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}$ のとき成立する.

例題 1.22 データ集合 (x_k, y_k), $(k = 1, 2, \ldots, n)$ に対して, **相関係数 (correlation coefficient)** は, 以下のように定義される.

$$\rho_{xy} = \frac{\mathrm{Cov}(X,\ Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{\mathrm{Cov}(X,\ Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

ただし, **分散 (variance)**, **共分散 (covariance)** は, 以下のように定義される.

$$V(X) = \sigma_x^2 = E\big((X - \mu_x)^2\big) = \frac{1}{n}\Big((x_1 - \mu_x)^2 + (x_2 - \mu_x)^2 + \cdots + (x_n - \mu_x)^2\Big)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu_x)^2 = E(X^2) - \mu_x^2$$

$$V(Y) = \sigma_y^2 = E\big((Y - \mu_y)^2\big) = \frac{1}{n}\Big((y_1 - \mu_y)^2 + (y_2 - \mu_y)^2 + \cdots + (y_n - \mu_y)^2\Big)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (y_k - \mu_y)^2 = E(Y^2) - \mu_y^2$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X - \mu_x)(Y - \mu_y))$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \big(x_k - \mu_x\big)\big(y_k - \mu_y\big) = E(XY) - \mu_x \mu_y$$

$$E(XY) = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

$$\mu_x = E(X) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

$$\mu_y = E(Y) = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k$$

このとき,

$$-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$$

を満足する.

《証明》 シュワルツの不等式

$$-\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \leq (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$$

を利用する.

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} x_1 - \mu_x \\ x_2 - \mu_x \\ \vdots \\ x_n - \mu_x \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} y_1 - \mu_y \\ y_2 - \mu_y \\ \vdots \\ y_n - \mu_y \end{pmatrix}$$

とすれば,

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu_x)(y_k - \mu_y) = \frac{1}{n}\mathrm{Cov}(X, Y)$$

$$\|\boldsymbol{a}\|^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu_x)^2 = \frac{1}{n}\sigma_x^2 \ \Rightarrow \ \|\boldsymbol{a}\| = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

$$\|\boldsymbol{b}\|^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(y_k - \mu_y)^2 = \frac{1}{n}\sigma_y^2 \ \Rightarrow \ \|\boldsymbol{b}\| = \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}}$$

以上をシュワルツの不等式に代入すれば,

$$-1 \leq \rho_{xy} = \frac{\mathrm{Cov}(X,\ Y)}{\sigma_x \sigma_y} \leq 1 \qquad \square$$

注意 1.16 高校数学で (「数学 I」) は, 相関係数を以下のように定義している.

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

ただし,

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\Big((x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y})+(x_2-\bar{x})(y_2-\bar{y})+\cdots+(x_n-\bar{x})(y_n-\bar{y})\Big)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(x_k-\bar{x}\big)\big(y_k-\bar{y}\big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \bar{x}\bar{y}$$
$$s_x^2 = \frac{1}{n}\Big((x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2\Big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \bar{x}^2$$
$$s_y^2 = \frac{1}{n}\Big((y_1-\bar{y})^2+(y_2-\bar{y})^2+\cdots+(y_n-\bar{y})^2\Big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(y_k-\bar{y})^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k^2 - \bar{y}^2$$
$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k,\ \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k$$

例題 1.23 定数 $d \neq 0, a_1, a_2, \dots, a_n$ を与えたとき,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + d = 0$$

を満たしながら動くとする. このとき, 関数

$$f = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

の最小値を求めよ.

《 解答 》 まず,

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

とすれば, シュワルツの不等式により,

$$(-d)^2 = (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})^2$$
$$\leq \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{x}\|^2 = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$$

したがって,

$$f = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq \frac{d^2}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \frac{d^2}{\|\boldsymbol{a}\|^2} \qquad \square$$

ただし, 等号は,

$$x_k = x_k^* = -\frac{d a_k}{\|\boldsymbol{a}\|^2},\ k = 1, 2, \dots, n$$

のときに成り立つ.

注意 1.17　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \neq 0$ に対して,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n + d = 0$$

を満たす $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ の集合を**超平面 (hyperplane)** という. これは, 空間における平面の方程式 (1.5) の一般化である.

3 次元空間と同様に, n 次元ベクトル空間内の点 $\mathrm{A}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ から超平面

$$\Gamma: \ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n + d = 0$$

に下ろした垂線の足を H とおくとき，線分 AH の長さを点 A と平面 Γ の距離と定義する. このとき,

$$L = \frac{|a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n + d|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}} = \frac{\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\alpha_k + d\right|}{\sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2}}$$

で与えられる. この結果を利用すれば, f の最小値は, 距離 AH の 2 乗に等しい. すなわち, 以下のように計算される.

$$f = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq \frac{|d|^2}{\sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2}^{\,2}} = \frac{d^2}{\|\boldsymbol{a}\|^2} \qquad \square$$

注意 1.18　全く異なる方法として, **ラグランジュの未定乗数法 (method of Lagrange multiplier)** による解法がある［2］. すなわち, $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n + d = 0$ を拘束条件として, f が最小となる条件を導出する.

まず, ラグランジュ関数

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + L(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n + d) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + L\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k + d\right) \end{aligned}$$

を定義する. ただし, L は**ラグランジュ定数 (Lagrange multiplier)** である. このとき, **偏微分 (partial derivative)** を行ない

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_k} = 2x_k + La_k = 0 \Rightarrow x_k = x_k^* = -\frac{L^*}{2} a_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$$

を得る[注7]. 次に, 拘束条件に代入し,

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n + d &= -\frac{L}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + d = 0 \\ \Rightarrow L = L^* &= \frac{2d}{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \end{aligned}$$

を得る. したがって,

$$x_k = x_k^* = -\frac{L^*}{2} a_k = -\frac{d a_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k^2},\ k = 1, 2, \ldots, n$$

以上より,

$$f \geq \sum_{k=1}^{n} (x_k^*)^2 = \frac{d^2 (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^2} = \frac{d^2}{\|\boldsymbol{a}\|^2} \qquad \square$$

ただし, 必要条件に過ぎないことに注意が必要である.

注7 $*$ は最適性の意味である. すなわち, 最小値を与える変数である.

第 1 章

問 1.1 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 1+4t \end{pmatrix}$.. 或いは, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 5-4t \end{pmatrix}$. も可.

問 1.2 まず, 動点 P のパラメータ表示は, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2-t \end{pmatrix}$ である.

したがって, $\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = 2t + 2(2-t) = 4$ で一定である.

問 1.3 $\boldsymbol{h} = \dfrac{1}{6}\boldsymbol{a} + \dfrac{5}{9}\boldsymbol{b}$

問 1.4 $\|\boldsymbol{x}\|^2 - 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0 \Rightarrow \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 \Leftrightarrow \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{a}\|$ と変形できるので, 中心が $\boldsymbol{a}$, 半径 $r = \|\boldsymbol{a}\|$ の円を表す. なお, この円は原点を通る.

問 1.5 $\dfrac{\pi}{4}$. [$\cos\angle\mathrm{BAP} = \dfrac{\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)}{\|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\|\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|} = \dfrac{2(t^2+2)}{\sqrt{t^4+4t^2+4}\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$]

問 1.6 $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2+4}$.

問 1.7 $\boldsymbol{e} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

問 1.8 $V = \dfrac{20}{3}$.

問 1.9 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+t \\ 1-2t \\ t \end{pmatrix}$. $x+1 = \frac{y-1}{-2} = z$. 或いは, $x = \frac{y+1}{-2} = z-1$.

問 1.10 $\sqrt{3}$. [$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} 2+t \\ 1 \\ -t \end{pmatrix}$, $\left\|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right\|^2 = 2(t-1)^2+3$.]

問 1.11 $\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 \mp \frac{2}{\sqrt{3}}, 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. ただし, 複号同順. [点 A から直線 ℓ に下した垂線の足 H は $(1,1,1)$. また, $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ と直線 ℓ の方向ベクトルの両方に垂直なベクトルを求める.]

問 1.12 $x+y-2z=1$.

問 1.13 $x+3y-2z=5$.

問 1.14 $2y-z=2$. [直線は, $\frac{x}{2} = y-1 = \frac{z}{2}$. したがって, 法線ベクトルは, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の両方に垂直.]

問 1.15 $x+2y-3z+3=0$. [法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は, 2 直線に平行である方向ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, および, それぞれ通る 2 点 $(0,0,1)$, $(-1,2,2)$ を結ぶベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の両方に垂直であることを利用する.]

問 1.16 交点 $\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{2}\right)$, $2x-7y+4z=6$.

問 1.17 $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-3} = z$. [直線の方向ベクトルは, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ の両方に垂直.]

問 1.18 $(1,1,4)$, $\left(\frac{5}{3},\frac{7}{3},\frac{8}{3}\right)$.

問 1.19 中心 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, 半径 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

問 1.20 $x^2+y^2+z^2+4x-6y-2z-15=0$.

問 1.21 $L=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{DP}}|^2=\dfrac{20}{3}$. [内接球の中心を O とする. また, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\boldsymbol{d}$ とおく. 中心 O は正四面体の重心なので, $\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\boldsymbol{0}$ に注意して, $L=4\|\boldsymbol{p}\|^2+\|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2+\|\boldsymbol{c}\|^2+\|\boldsymbol{d}\|^2$. また, 内接球の半径 $r=\|\boldsymbol{p}\|=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\|\boldsymbol{a}\|=\|\boldsymbol{b}\|=\|\boldsymbol{c}\|=\|\boldsymbol{d}\|=\sqrt{\frac{3}{2}}$ を利用する.]

関連図書

[1] 粟田 多喜夫, 飯間 信, 河村 尚明, **専門基礎 線形代数学**, 培風館, 2017.

[2] 阿部 誠, 岩本 宙造, 島 唯史, 向谷 博明, **専門基礎 微分積分学**, 培風館, 2017.

[3] 黒田 紘敏, **線形代数学入門**, `http://www7b.biglobe.ne.jp/~h-kuroda/pdf/text_linear_algebra.pdf`, (2022 年 7 月 参照)