広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）

受験番号	M

令和５年　８月　２４日　　　　１３：３０ ～ １６：３０

注 意 事 項

１．以下の用紙が配布されている．

問題用紙（表紙を含む）	１０ 枚
解答用紙	２ 枚
下書き用紙	２ 枚

２．問題は全部で ９ 問ある．この中から ２ 問選んで解答せよ．

３．問題ごとに必ず一枚ずつ別々の解答用紙を用い，それぞれの解答用紙に問題番号を記入して解答せよ．紙面が不足した場合は裏面を使用してよい．

４．試験問題の表紙，解答用紙，および下書き用紙のすべてに受験番号を記入せよ．

５．試験終了時には，すべての解答用紙および下書き用紙を提出すること．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数学プログラム	専門科目（午後）	令和５年８月実施

選択問題：次の [4] ～ [12] の９問中の２問を選んで解答せよ．

[4] 次の (A), (B), (C) のすべての問に答えよ．

(A) G と G' を群とし, $\varphi\colon G \to G'$ を群の準同型とする．$g \in G$ を位数有限の元とし, その位数を n とする．このとき $\varphi(g) \in G'$ は位数有限であり, その位数は n の約数であることを示せ．

(B) 以下の問に答えよ．

(1) G を群とし N を G の正規部分群とする．N の G における指数は有限であるとし, その指数を n とする．このとき任意の $g \in G$ に対し $g^n \in N$ であることを示せ．

(2) 実数全体のなす集合が加法に関してなす群を $\mathbb{R}$ とする．$\mathbb{R}$ の指数有限の部分群は $\mathbb{R}$ のみであることを示せ．

(C) 体 K に対し, K の元を成分とする 2×2 の正則行列全体が行列の積に関してなす群を $\mathrm{GL}(2, K)$ と書く．以下の問に答えよ．

(1) $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})$ は $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ の部分群である．(この事実は証明する必要はない.) $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})$ は $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ の正規部分群であるか．理由とともに述べよ．

(2) $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})$ の元で位数が 3 の元を一つ挙げよ．

(3) $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})$ に位数 5 の元は存在しないことを示せ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和５年８月実施

[**5**] $R = \mathbb{Z}[x, y]$ は整数係数 2 変数の多項式環, $S = \mathbb{R}[t]$ は実数係数 1 変数の多項式環とする. 環準同型 $\Phi : R \to S$ は整数 n に対し $\Phi(n) = n$ を満たし, かつ $\Phi(x) = 2t^2$, $\Phi(y) = 3t^3$ が成り立つとする. 以下の問に答えよ.

(1) $f = f(x, y) \in R$ に対し, $\Phi(f) = f(2t^2, 3t^3)$ となることを示せ.

(2) R のイデアル $\mathrm{Ker}\,\Phi$ は素イデアルであることを示せ.

(3) イデアル $\mathrm{Ker}\,\Phi$ に含まれる 0 でない元を一つ挙げよ.

(4) 自然数 d および整数 $a_0, a_1, \ldots, a_d$ に対し,

$$f(x, y) = a_0 x^{3d} + a_1 x^{3(d-1)} y^2 + a_2 x^{3(d-2)} y^4 + \cdots + a_{d-1} x^3 y^{2(d-1)} + a_d y^{2d}$$

が $\mathrm{Ker}\,\Phi$ に含まれるならば, a_0 は 9 の倍数であることを示せ.

(5) $\mathrm{Ker}\,\Phi$ は単項イデアルであることを示せ.

(6) 剰余環 $R/\mathrm{Ker}\,\Phi$ の極大でないイデアル J で, 単項イデアルでないものを一つ挙げよ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数学プログラム	専門科目（午後）	令和５年８月実施

[**6**] 2 次元単位球面 $S^2 = \{u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1\}$ 上に同値関係 $\sim$ を

$$u \sim v \ (u, v \in S^2) \iff u = v \text{ または } u = -v$$

で定め, この同値関係による S^2 の商空間を $\mathbb{R}P^2$ とする. 写像 $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^5$ を次で定める.

$$f\big([(u_1, u_2, u_3)]\big) = \left(2u_1u_2,\ 2u_1u_3,\ 2u_2u_3,\ u_1^2 - u_2^2,\ \sqrt{3}u_3^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

以下の問に答えよ.

(1) f は well-defined であることを証明せよ.

(2) f は単射であることを証明せよ.

(3) f ははめ込みであることを証明せよ.

(4) 正の実数 r に対して,

$$S^4(r) = \left\{x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = r^2\right\}$$

を半径 r の 4 次元球面とする. このとき $f\big(\mathbb{R}P^2\big)$ はある $S^4(r)$ の部分集合であることを示し, そのときの半径 r を求めよ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数学プログラム	専門科目（午後）	令和５年８月実施

[**7**] 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の部分空間 S^1, D^2 をそれぞれ次で定義する．

$$S^1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\},$$
$$D^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}.$$

以下の問に答えよ．

(1) D^2 が可縮あることを示せ．

(2) 2 次元トーラス $T = S^1 \times S^1$ から一点を除いた空間の基本群を求めよ．

(3) T と実射影平面 $\mathbb{R}P^2$ の連結和 $T\#\mathbb{R}P^2$ の基本群を求めよ．

(4) $T\#\mathbb{R}P^2$ の整数係数ホモロジー群を求めよ．

(5) $T = S^1 \times S^1$ と D^2 を $S^1 \times \{(1,0)\}$ と D^2 の境界を同一視して貼り付けた空間 X の整数係数ホモロジー群を求めよ．

(6) $f : D^2 \to S^1$ であり f を D^2 の境界に制限したとき恒等写像となるような連続写像が存在するか調べよ．存在する場合は例を構成せよ．存在しない場合は証明せよ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和５年８月実施

[**8**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) 次の積分を考える．

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^4+4} dx.$$

以下の問に答えよ．

(1) 広義積分 I は絶対収束することを示せ．

(2) $R \geq 2$ に対し γ_R を $z(t) = Re^{it}$ $(t \in [0, \pi])$ により定まる曲線とする．このとき，次が成り立つことを示せ．

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^4+4} dz = 0.$$

(3) I の値を求めよ．

(B) $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ とし，D の閉包を $\overline{D}$, D の境界を ∂D と書くことにする．$\mathbb{R}$ の開区間 $J = (-\delta, \delta)$ $(\delta > 0)$ に対し $E = \{e^{i\theta} \mid \theta \in J\}$ と定める．$f, g : \overline{D} \to \mathbb{C}$ は D 上で正則かつ $\overline{D}$ 上で連続であり，E 上で $f = g$ を満たすとする．以下の問に答えよ．

(1) $\phi \in \mathbb{R}$ に対し，$E_\phi = \{e^{i(\theta+\phi)} \mid \theta \in J\}$ と定める．このとき，有限個の $\phi_1, \ldots, \phi_m \in \mathbb{R}$ が存在し，$\partial D = \bigcup_{j=1}^{m} E_{\phi_j}$ となることを示せ．

(2) (1) の $\phi_1, \ldots, \phi_m$ に対し，

$$h(z) = \prod_{j=1}^{m} \left(f(e^{-i\phi_j} z) - g(e^{-i\phi_j} z) \right)$$

とおく．このとき，$h(z)$ は ∂D 上で恒等的に 0 であることを示せ．

(3) (2) の $h(z)$ は $\overline{D}$ 上で恒等的に 0 であることを示せ．

(4) $\overline{D}$ 上で $f = g$ が成立することを示せ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数学プログラム	専門科目（午後）	令和５年８月実施

[**9**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) 関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ は連続であり, $f(0)=f(1)=0$ を満たし, $0<c<1$ が存在して, $[0,c]$ 上で狭義に増加であり, $[c,1]$ 上で狭義に減少であるとする. 関数 f を $[0,c]$ 上に制限したときの逆関数 $g_1:[0,f(c)]\to\mathbb{R}$ と, 関数 f を $[c,1]$ 上に制限したときの逆関数 $g_2:[0,f(c)]\to\mathbb{R}$ を考える. 以下の問に答えよ. なお関数 g_1 と関数 g_2 が連続であることは認めて解答して良い.

(1) 次が成り立つことを示せ.

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x<1,\ 0<y<f(x)\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<y<f(c),\ g_1(y)<x<g_2(y)\}$$

(2) C^1 級関数 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を考える. 導関数を φ' と表すとき, 次が成り立つことを示せ.

$$\int_0^1 (\varphi(f(x))-\varphi(0))\,dx=\int_0^{f(c)}(g_2(y)-g_1(y))\varphi'(y)\,dy$$

(3) 関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^3-3x^2+2x$ を考える. このとき関数 f は本問の条件を満たすことを確かめ, 更に対応する c および関数 g_1 と g_2 に対して, 次の積分の値を求めよ.

$$2\int_0^{f(c)}(g_2(y)-g_1(y))y\,dy$$

(B) 区間 $[0,1]$ 上の実数値ルベーグ可測関数列 $\{f_n\}$ と, 区間 $[0,1]$ 上の実数値ルベーグ可測関数 f を考える. ルベーグ測度を μ と表すとき, 各 n に対して $f_n(x)\geq 0$ μ-a.e. $x\in[0,1]$ が成り立ち, また任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\mu(\{x\in[0,1] \mid |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\})=0$$

が成り立つとする. 以下の問に答えよ.

(1) $\varepsilon>0$ とする. 各 n に対して次が成り立つことを示せ.

$$\mu(\{x\in[0,1] \mid f(x)\leq-\varepsilon\})\leq\mu(\{x\in[0,1] \mid |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\})$$

(2) $f(x)\geq 0$ μ-a.e. $x\in[0,1]$ が成り立つことを示せ.

(3) 各 f_n はルベーグ可積分であり,

$$\liminf_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx<+\infty$$

が成り立つならば, 関数 f はルベーグ可積分であることを示せ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数学プログラム	専門科目（午後）	令和５年８月実施

[**10**] $X_1, X_2, \ldots$ を独立に区間 $(0, 1)$ 上の一様分布に従う確率変数列とする. n を 2 以上の自然数とし, $Y_1^{(n)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$, $Y_1^{(n)} = X_k$ となる k を K_n と表す. $K_n = k$ のとき

$$Y_2^{(n)} = \min\bigl(\{X_1, \ldots, X_n\} \cap \{X_k\}^c\bigr)$$

とする. ただし A^c は A の補集合を表す. $Z_n = Y_2^{(n)} - Y_1^{(n)}$ とするとき, 以下の問に答えよ.

(1) $Y_1^{(1)} = X_k$ となる k は確率 1 でただ一つ定まることを示せ.

(2) $K_n = k$ が与えられたときの $Y_1^{(n)}$ の条件付き分布の分布関数を $F_n(y_1 \mid k)$ と表す. $0 \leq y_1 \leq 1$ のとき $F_n(y_1 \mid k)$ を求めよ.

(3) $K_n = k$ が与えられたときの $(Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)})$ の条件付き分布の同時分布関数を $F_n(y_1,\, y_2 \mid k)$ と表す. $0 \leq y_1 < y_2 \leq 1$ のとき, $F_n(y_1,\, y_2 \mid k)$ を求めよ.

(4) Z_n の期待値を求めよ.

(5) $n \to \infty$ のとき, Z_n は 0 に確率収束することを示せ.

(6) $W_n = nZ_n$ の $n \to \infty$ のときの極限分布の分布関数を求めよ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和５年８月実施

[11] $t \geq 0$ で定義された正値連続関数 $a(t)$ と実数 $L > 0$ に対して次の微分方程式を考える.

$$(\mathrm{H}) \qquad \begin{cases} a(t)\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0 & (t > 0, x \in I), \\ u(t,0) = 0, u(t,L) = 0 & (t > 0), \\ u(0,x) = f(x) & (x \in I). \end{cases}$$

ただし, $I = [0, L]$ であり, f は I 上の実数値連続関数で $f(0) = f(L) = 0$ を満たすとする. また, I 上の実数値連続関数 g, h に対して

$$(g,h) = \int_0^L g(x)h(x)dx$$

と定める. 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) (1) 定数 $\omega \geq 0$ に対する微分方程式 $\varphi''(x) = \omega^2 \varphi(x)$ の一般解を求めよ.

(2) 閉区間 I 上の C^2 級関数 φ と実数 λ の組で,

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda \varphi(x) & (x \in I), \\ \varphi(0) = 0, \ \varphi(L) = 0 \end{cases}$$

を満たし, さらに $\varphi'(0) > 0$ かつ $(\varphi, \varphi) = 1$ となるものをすべて求めよ.

(3) (2) で求めた関数 φ を I における零点（すなわち, $\varphi(x) = 0$ を満たす $x \in I$）の個数の少ない順に $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ と並べる. このとき $m \neq n$ ならば $(\varphi_m, \varphi_n) = 0$ となることを示せ.

(B) 関数 $u(t,x)$ は $[0,\infty) \times I$ 上で連続, $(0,\infty) \times I$ 上で t について 1 回微分可能, x について 2 回微分可能で, 各導関数は $(0,\infty) \times I$ 上で連続であり, さらに (H) を満たすとする. 関数 $u(t,x)$ に対して

$$c_n(t) = (u(t,\cdot), \varphi_n) \left(= \int_0^L u(t,x)\varphi_n(x)dx \right) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

とおく. ただし, φ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ は (A) で求めた関数とする. 以下の問に答えよ.

(1) 関数 c_n を求めよ.

(2) $v(t,x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\varphi_n(x)$ とおく. このとき $\dfrac{\partial v}{\partial t}$ は $(0,\infty) \times I$ 上で存在し, $(0,\infty) \times I$ 上の連続関数であることを示せ.

(3) 関数 $\dfrac{1}{a(t)}$ は $[0,\infty)$ 上で可積分でないとすると任意の $x \in I$ に対して $\displaystyle\lim_{t\to\infty} u(t,x) = 0$ が成り立つことを示せ. ただし, 必要であれば, 任意の I 上の 2 乗可積分関数 ψ に対し,

$$\left(\int_I |\psi(x)|^2 dx \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\psi, \varphi_n)|^2$$

が成り立つことは証明なしに用いてもよい.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和５年８月実施

[**12**] $X_1, \ldots, X_n$ $(n \geq 1)$ を互いに独立にいずれもガンマ分布 $\mathrm{Ga}(a, \theta)$ $(a > 0,\ \theta > 0)$ に従う確率変数列とし，$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ とおく．ここで，$\mathrm{Ga}(a, \theta)$ の確率密度関数は

$$f(x \mid \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(a)\theta^a} x^{a-1} e^{-x/\theta} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

で与えられる．ただし，Γ は $\Gamma(k) = \displaystyle\int_0^\infty t^{k-1} e^{-t} dt$ $(k > 0)$ により定義されるガンマ関数とする．このとき，a を既知とするときの，θ の推定問題を考える．本問において，ガンマ分布 $\mathrm{Ga}(a, \theta)$ に従う確率変数 X に関する次の性質は証明なしに用いてよいものとする．

$$\mathrm{E}(X) = a\theta, \quad \mathrm{Var}(X) = a\theta^2, \quad \mathrm{E}(e^{itX}) = \frac{1}{(1 - it\theta)^a} \quad (i \text{ は虚数単位}).$$

以下の問に答えよ．

(1) $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ とおくとき，$\bar{X}_n$ の従う確率分布を求め，$\mathrm{E}(\bar{X}_n^2)$ を求めよ．

(2) θ の最尤推定量 $\delta_1(\boldsymbol{X})$ を $\bar{X}_n$ を用いて表し，それが θ の不偏推定量になっていることを示せ．

(3) $\boldsymbol{X}$ の θ に関するフィッシャー情報量を

$$I_{\boldsymbol{X}}(\theta) = \mathrm{E}\left\{ -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(\boldsymbol{X} \mid \theta) \right\}$$

により定義する．(2) で求めた推定量 $\delta_1(\boldsymbol{X})$ の分散 $\mathrm{Var}\{\delta_1(\boldsymbol{X})\}$ がクラメール・ラオの不等式

$$\mathrm{Var}\{\delta_1(\boldsymbol{X})\} \geq \frac{1}{I_{\boldsymbol{X}}(\theta)}, \quad \theta > 0$$

の下限を達成することを示せ．

(4) c を定数とし，$\delta_2(\boldsymbol{X}) = c\bar{X}_n$ の形の推定量を考える．θ の推定量 $\delta(\boldsymbol{X})$ の平均二乗誤差を $\mathrm{E}\left[\{\delta(\boldsymbol{X}) - \theta\}^2\right]$ により定義するとき，$\delta_2(\boldsymbol{X})$ の平均二乗誤差を最小にする c を求め，その最小値と $\delta_1(\boldsymbol{X})$ の平均二乗誤差の大小を比較せよ．