令和６年度
広島大学光り輝き入試 総合型選抜
理学部　数学科

筆記試験 問題

令和5年11月18日
自 13時00分
至 15時30分

答案作成上の注意

1. 試験開始の合図があるまでは，この問題冊子の中を見てはいけません。

2. この問題冊子の総ページは１３ページです (表紙１ページを含む)。

3. 解答用紙は５枚です。解答は，すべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄 (表面) に記入しなさい。もし解答欄が足りない場合には解答用紙の裏面を使用しても構いません。

4. 受験番号は，すべての解答用紙の所定の場所に，必ず記入しなさい。

5. 配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

6. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

問題は次ページから始まります。

[**1**] 以下の問いに答えよ。

(1) $4\cos^3\alpha + 2\cos^2\alpha - 3\cos\alpha - 1 = 0$ かつ $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3}$ を満たす実数 α がただ一つ存在することを示せ。

(2) (1) の実数 α に対し，$\cos 2\alpha + \cos 3\alpha$ の値を求めよ。

(3) (1) の実数 α の値を求めよ。

－余白－

[2] 実数 a は $a>1$ を満たすとする。O$(0,0)$ を原点とする座標平面上の曲線

$$C : y = -x^3 + (a+1)x^2 - ax$$

を考える。点 O を通り正の傾きをもつ直線 ℓ は，点 P において曲線 C と接するとする。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形のうち，不等式 $y \geqq 0$ の表す領域にある部分の面積を S_1 とする。S_1 を a を用いて表せ。

(2) 点 P の x 座標と直線 ℓ の方程式を，それぞれ a を用いて表せ。

(3) 直線 ℓ と曲線 C で囲まれた部分の面積 S_2 を a を用いて表せ。

(4) (1) の S_1 と (3) の S_2 に対し，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

－余白－

[3] 複素数 α は $|\alpha| = 1$ を満たし，さらにその偏角 θ は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする。複素数平面上で α が表す点を A とし，$\overline{\alpha}$ が表す点を B とする。ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数を表す。0 でない複素数 z に対し，w を $w = \dfrac{1}{z}$ により定める。以下の問いに答えよ。

(1) 点 z が線分 AB 上を動くとき，$\dfrac{1}{w} + \dfrac{1}{\overline{w}}$ の値を θ を用いて表せ。

(2) 点 z が線分 AB 上を動くとき，点 w の描く曲線を求めよ。

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，線分 AB と (2) で求めた曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。

－余白－

[4] 関数 $g(x)$ を $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ により定め，関数 $f(x)$ を $f(x)=x\,g(x)$ により定める。以下の問いに答えよ。

(1) $x>0$ ならば $0<f(x)\leqq x$ が成り立つことを示せ。

(2) $g(x)$ は閉区間 $[0,1]$ で単調に増加することを示せ。

(3) $0<\alpha\leqq 1$ とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=\alpha, \qquad a_{n+1}=f(a_n) \quad (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

により定める。自然数 n に対し，次の不等式を示せ。

$$0<a_n\leqq \alpha\,\{g(\alpha)\}^{n-1}$$

(4) (3) の実数 α と数列 $\{a_n\}$ に対し，α の値に応じて $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

－余白－

[**5**] n を 2 以上の自然数とする。広大（こうた）さんは n 枚の抽選補助券を持って商店街の福引きを行う。抽選補助券 2 枚で福引きを 1 回行うことができる。1 回の福引きにつき，赤玉，青玉，緑玉，白玉が一つずつ入っている箱から玉を 1 個取り出す。赤玉が出たときには賞品 A を，青玉が出たときには賞品 B を，緑玉が出たときには賞品 C をもらえる。一方，白玉が出たときには賞品ではなく抽選補助券 1 枚をもらえるが，次の福引きを行うためにその抽選補助券を使うことができる。取り出した玉は福引きが終わるたびに箱に戻す。広大さんは持っている抽選補助券が 0 枚または 1 枚になるまで福引きを繰り返す。このとき,「広大さんが賞品 A，賞品 B，賞品 C をすべて 1 個以上もらえる」という事象が起こる確率を p_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) p_6 を求めよ。

(2) p_7 を求めよ。

(3) p_8 を求めよ。

－以下余白－