2023年10月入学，2024年4月入学（October 2023 and April 2024 Admission）
広島大学大学院先進理工系科学研究科博士課程前期（一般選抜）専門科目入学試験問題
問題用紙
Graduate School of Advanced Science and Engineering (Master's Course), Hiroshima University
Entrance Examination Booklet (General Selection)
Question Sheets

（2023年8月24日実施 / August 24, 2023）

試験科目 Subject	情報科学 (専門科目 I) Informatics and Data Science I

プログラム Program	情報科学 Informatics and Data Science	受験番号 Examinee's Number	M

試験時間：9時00分～11時00分　(Examination Time : From 9:00 to 11:00)

受験上の注意事項

1. この問題用紙は表紙を含み5枚あります。
2. 表紙および各ページに，受験番号を記入してください。
3. これは問題用紙です。解答は別冊の解答用紙に記入してください。
4. 解答が書ききれないときは，同じ用紙の裏面を利用しても構いません。ただし，その場合は「裏に続く」などと記入して裏面に記載したことが分かるようにしてください。
5. すべての問題に解答してください。
6. 問題用紙は解答用紙とともに回収します。
7. 質問あるいは不明な点がある場合は手を挙げてください。

Notices

1. There are 5 question sheets including a front sheet.
2. Fill in your examinee's number in the specified positions in this cover and each question sheet.
3. This examination booklet consists of only question sheets. Use other separate sheets for answers.
4. If the space is exhausted, use the reverse side of the sheet and write down "to be continued" on the last line of the sheet.
5. Answer all the questions.
6. Return these question sheets together with the answer sheets.
7. Raise your hand if you have any questions.

2023年10月入学，2024年4月入学（October 2023 and April 2024 Admission）
広島大学大学院先進理工系科学研究科博士課程前期（一般選抜）専門科目入学試験問題
Graduate School of Advanced Science and Engineering (Master's Course), Hiroshima University
Entrance Examination Booklet (General Selection)

（2023年8月24日実施 / August 24, 2023）

試験科目 Subject	情報科学 (専門科目 I) Informatics and Data Science I

プログラム Program	情報科学 Informatics and Data Science	受験番号 Examinee's Number	M

問題 1 (Question 1)

n 次実対称行列 $A = [a_{ij}]$ の n 個の固有値を $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ とし，対応する固有ベクトルを $u_1, u_2, \ldots, u_n$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ となることを示せ．

(2) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ となることを示せ．

Let $A = [a_{ij}]$ be an $n \times n$ real symmetric matrix with eigenvalues $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ and corresponding eigenvectors $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Answer the following questions.

(1) Show that $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

(2) Show that $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

2023 年 10 月入学，2024 年 4 月入学（October 2023 and April 2024 Admission）
広島大学大学院先進理工系科学研究科博士課程前期（一般選抜）専門科目入学試験問題
Graduate School of Advanced Science and Engineering (Master's Course), Hiroshima University
Entrance Examination Booklet (General Selection)

（2023 年 8 月 24 日実施 / August 24, 2023）

試験科目 Subject	情報科学 (専門科目 I) Informatics and Data Science I

プログラム Program	情報科学 Informatics and Data Science	受験番号 Examinee's Number	M

問題 2 (Question 2)

2 変数関数 $\varphi(u,v)$，$\psi(u,v)$ は C^∞ 級で $\varphi(0,0)=\psi(0,0)=0$ とし，$f(x,y)=e^{-x^2-y^2}xy$ とする．
以下の問いに答えよ．

(1) $(x,y)=(0,0)$ において，関数 $f(x,y)$ が極値をとるかどうか調べよ．

(2) $\frac{\partial\varphi}{\partial u}(0,0)=a$，$\frac{\partial\varphi}{\partial v}(0,0)=b$，$\frac{\partial\psi}{\partial u}(0,0)=c$，$\frac{\partial\psi}{\partial v}(0,0)=d$ とし，$f(x,y)$ と $\varphi(u,v)$，$\psi(u,v)$ との合成関数を $g(u,v)=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ とするとき，$g(u,v)$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ．

(3) $ad-bc\neq 0$ とするとき，$(u,v)=(0,0)$ において $g(u,v)$ が極値をとるかどうか調べよ．

Let $\varphi(u,v)$ and $\psi(u,v)$ be two variable C^∞ functions with $\varphi(0,0)=\psi(0,0)=0$, and let $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}xy$.
Answer the following questions:

(1) Determine if the function $f(x,y)$ has a local extremum at $(x,y)=(0,0)$.

(2) Let $\frac{\partial\varphi}{\partial u}(0,0)=a$, $\frac{\partial\varphi}{\partial v}(0,0)=b$, $\frac{\partial\psi}{\partial u}(0,0)=c$, and $\frac{\partial\psi}{\partial v}(0,0)=d$. Let $g(u,v)$ be a two variable composite function $g(u,v)=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$. Calculate the Maclaurin polynomial of degree 2 for $g(u,v)$.

(3) Determine if the function $g(u,v)$ has a local extremum at $(u,v)=(0,0)$ in the case that $ad-bc\neq 0$.

試験科目 Subject	情報科学 (専門科目 I) Informatics and Data Science I	プログラム Program	情報科学 Informatics and Data Science	受験番号 Examinee's Number	M

問題 3 (Question 3)

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は互いに独立かつ同一な分布に従う離散型確率変数とし，X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ の確率関数を

$$P(X_i = k) = p_k \quad k = 0, 1, \ldots, m$$

とする．ただし $p_k \geq 0$, $\sum_{k=0}^{m} p_k = 1$ である．また $X_1, \ldots, X_n$ のうち $X_i = k$ となる X_i の個数を確率変数 Y_k で表す．

(1) $m = 1$ とするとき，確率 $P(Y_1 = k)$ が

$$P(Y_1 = k) = \binom{n}{k} p_1^k p_0^{n-k}$$

となることを示せ．

(2) $m = 1$ とするとき，平均 $\mathrm{E}[Y_1]$ および分散 $\mathrm{Var}[Y_1]$ を求めよ．

(3) $m = 2$ とするとき，確率 $P(Y_1 = k)$ を求めよ．

(4) $m = 2$ とするとき，確率 $P(Y_2 = k | Y_1 = l)$ を求めよ．

(5) $m = 2$ とするとき，確率 $P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2)$ を求めよ．

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be mutually independent and identically distributed discrete random variables. The probability mass function of X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ is given by

$$P(X_i = k) = p_k \quad k = 0, 1, \ldots, m,$$

where $p_k \geq 0$ and $\sum_{k=0}^{m} p_k = 1$. Let Y_k be the number of X_i that equal k among $X_1, \ldots, X_n$.

(1) When $m = 1$, prove that the probability $P(Y_1 = k)$ is given by

$$P(Y_1 = k) = \binom{n}{k} p_1^k p_0^{n-k}.$$

(2) When $m = 1$, find the mean $\mathrm{E}[Y_1]$ and the variance $\mathrm{Var}[Y_1]$.

(3) When $m = 2$, find the probability $P(Y_1 = k)$.

(4) When $m = 2$, find the probability $P(Y_2 = k | Y_1 = l)$.

(5) When $m = 2$, find the probability $P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2)$.

試験科目 Subject	情報科学 (専門科目 I) Informatics and Data Science I

プログラム Program	情報科学 Informatics and Data Science	受験番号 Examinee's Number	M

問題 4 (Question 4)

平面上の頂点集合とそれらの頂点を交差なく結ぶ辺集合からなるグラフを平面グラフと呼び，平面グラフと同型なグラフを平面的であると言う．また位数 (= 頂点数)x の完全グラフを K_x と記す．以下の問いに答えなさい．

(1) K_4 は平面的か，理由とともに答えなさい．

(2) 自己ループを含まず任意の 2 頂点間に高々1 本の辺が張られているグラフを単純グラフと呼び，どの 2 頂点間に辺を追加しても平面性が損なわれるような単純平面グラフを極大平面グラフと呼ぶ．位数 $p(\geq 3)$ の極大平面グラフの辺数 q が，領域数 r を用いて $q = (3/2)r$ であらわされることを証明しなさい．

(3) 上の結果を用いて，位数 p の任意の平面グラフの辺数 q が $q \leq 3p - 6$ を満たすことを証明しなさい．証明では平面グラフに関するオイラーの公式を用いて構わない．

(4) K_5 の辺数は 10 なので，上の結果から K_5 が平面的ではないことがわかる．では K_5 から任意の辺を 1 本削除して得られるグラフは平面的か，理由とともに答えなさい．回答では，上述の "$q \leq 3p - 6$" がグラフが平面的であるための必要条件ではあるが十分条件ではない点に留意すること．

A graph that is drawn in the plane with a collection of vertices and edges, without any crossing, is called a plane graph. A graph is said to be planar if it can be transformed into a plane graph through isomorphism. Let K_x denote a complete graph with x vertices; i.e., order x. Answer the following questions.

(1) Answer whether K_4 is planar or not, together with the reason.

(2) A graph with no self-loop and at most one edge between any two vertices is called a simple graph and a simple graph whose planarity is violated by adding an edge between any two vertices is called a maximal planar graph. Prove that the number of edges q of any maximal planar graph of order $p(\geq 3)$ satisfies $q = (3/2)r$, where r denotes the number of regions in the planar drawing.

(3) Prove that the number of edges q of any planar graph of order p satisfies $q \leq 3p - 6$, using the above result. In the proof, you can use the Euler's formula on plane graphs.

(4) The above result implies that K_5 is not planar since K_5 contains 10 edges. Then, answer whether the graph obtained by deleting an arbitrary edge from K_5 is planar or not, together with the reason. Note that "$q \leq 3p - 6$" is a necessary but not a sufficient condition for the graph to be planar.