令和６（２０２４）年度

広島大学一般選抜　後期日程

理学部　数学科

数　学

数学 I，数学 II，数学 III，
数学 A，数学 B

令和 6 年 3 月 12 日

自　9 時 00 分
至　11 時 30 分

答案作成上の注意

1. 試験開始の合図があるまでは，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子には，数学 I，数学 II，数学 III，数学 A，数学 B（数列，ベクトル）に関する問題が **5 問** あります。総ページは **１３ ページ**で，問題は４ページ以降の偶数ページにあります。
3. 解答用紙は **5 枚**です。解答はすべて**対応する番号の解答用紙**の所定の**解答欄**（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
4. 下書き用紙は **3 枚**です。下書き用紙の注意書きもよく読みなさい。
5. **受験番号**は，それぞれの解答用紙の所定の欄に必ず記入しなさい。
6. 配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

空　白

空　白

〔1〕　θ は $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とし，$t = \tan\theta$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\cos 2\theta$ と $\sin 2\theta$ をそれぞれ t を用いて表せ。

(2) t が有理数であることは，$\cos 2\theta$ と $\sin 2\theta$ がともに有理数であるための必要十分条件であることを示せ。

空　白

〔2〕　座標空間内に，6点 $\mathrm{A}(1,0,0), \mathrm{B}(0,1,0), \mathrm{C}(0,0,1), \mathrm{D}(0,-1,0), \mathrm{E}(0,0,-1)$, $\mathrm{F}(-1,0,0)$ を頂点とする正八面体 X が与えられている。また，座標空間の原点を O とする。また，点 M を三角形 ABC の重心とし，点 P を正八面体 X の内部の点とする。ただし，点 P は正八面体 X の面または辺上にはなく，またどの頂点にも一致しないものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 三角形 ABC の面積を求めよ。

(2) 四面体 PABC の体積は，ベクトルの内積を用いて $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PM}}$ と表されることを示せ。

(3) 四つの四面体 PABC，PADE，PFDC，PFBE の体積の和は，点 P の取り方によらず一定であることを示せ。

空　白

〔３〕 $\{a_n\}$ を各項が自然数である数列，$\{b_n\}$ を各項が実数である数列とする。また，数列 $\{c_n\}$ を，

$$c_n = b_{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

として定める。たとえば，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_n = 2n + 1,\ b_n = 3n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

として定めるとき，$a_1 = 3$ であるから $c_1 = b_3 = 10$ であり，$a_2 = 5$ であるから $c_2 = b_5 = 16$ である。以下の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_n = 2n + 1,\ b_n = 3n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

として定めるとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を各項が自然数である等差数列，数列 $\{b_n\}$ を等比数列とするとき，数列 $\{c_n\}$ は等比数列であることを示せ。

(3)

$$b_n = 3^n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と定める。n が 5 の倍数であるならば，$b_n - 1$ は 11 の倍数になることを示せ。

(4)

$$a_n = 2^n,\ b_n = 3^n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と定めるとき，c_{2024} を 11 で割ったときの余りを求めよ。

空　白

〔 4 〕 6枚のカードが袋に入っており，1枚に1文字ずつ,「1」,「2」,「3」,「4」,「5」,「終」とそれぞれ書かれている。袋から1枚ずつカードを取り出して，別に準備した箱に移動していき,「終」と書かれたカードが出たらそこで終了して，それまでに箱に移されたカードに書かれた数字の集合を記録する，という試行 T を考える。A さんがこの試行 T を行って記録した数字の集合を S_{A} とする。S_{A} は $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ の部分集合である。たとえば，A さんが最初に「終」のカードを取り出したら，S_{A} は空集合である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) S_{A} が3個の要素からなる確率を求めよ。

(2) 1が S_{A} の要素である確率を求めよ。また，1と2がともに S_{A} の要素である確率を求めよ。

(3) 1が S_{A} の要素であるとき，2が S_{A} の要素でない条件付き確率を求めよ。

(4) S_{A} が $\{1, 2, 3, 4\}$ を含む確率を求めよ。

(5) B さんも試行 T を行った。B さんが記録した数字の集合を S_{B} とする。S_{A} が S_{B} を含む確率を求めよ。

空　白

〔5〕 以下の問いに答えよ。

(1) 座標平面上に2点 $\mathrm{P}(\sqrt{3}, 0)$, $\mathrm{Q}(-\sqrt{3}, 0)$ が与えられている。次の条件 $(*)$ を満たす座標平面上の点R全体がなす図形を A とする。

$$(*)\begin{cases}\text{点Rは P, Q のどちらかと一致するか,}\\ \text{あるいは P, Q のどちらとも異なり,}\ \dfrac{\pi}{3} \leqq \angle\mathrm{PRQ}\ \text{を満たす。}\end{cases}$$

図形 A を図示せよ。

(2) (1) の図形 A を x 軸の周りに1回転してできる図形を B とする。図形 B の体積を求めよ。

(3) Oを原点とする座標空間内に点 $\mathrm{S}(1, 2, 2)$ が与えられている。次の条件 $(**)$ を満たす座標空間内の点T全体がなす図形を C とする。

$$(**)\begin{cases}\text{点Tは O, S のどちらかと一致するか,}\\ \text{あるいは O, S のどちらとも異なり,}\ \dfrac{\pi}{3} \leqq \angle\mathrm{OTS}\ \text{を満たす。}\end{cases}$$

図形 C の体積を求めよ。

空　白