

広島大学大学院先進理工系科学研究科（博士課程前期）入学試験問題

物理学プログラム 量子物質科学プログラム（物理学分野）

専 門 科 目

2024 年 8 月 22 日 9:00～12:00

注意事項

(1) 以下の用紙が配付されている。

問題用紙（表紙を含む）	9 枚
解答用紙	4 枚
下書用紙	1 枚

(2) 問題は全部で 4 問あり，[I]～[IV]の問題番号および出題科目名を に示してある。これら全ての問題について解答せよ。

(3) 解答は問題ごとに指定の用紙を用いること。解答方法が特に指定されている場合を除き，最終的な答えだけでなく，解答に至った考え方や途中計算も示せ。紙面が不足した場合は表面に「裏面に続く」と明記し，裏面に記入せよ。

(4) 解答用紙および下書用紙の全てに受験番号を記入せよ。

(5) 試験終了後，全ての解答用紙および下書用紙を提出せよ。

広島大学大学院先進理工系科学研究科（博士課程前期）
物理学プログラム・量子物質科学プログラム（物理学分野） 入学試験問題

I	力学
---	----

微小変換に対するラグランジアン $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ の変化と保存量に関する以下の文章の ア から ソ に入る適切な式を書け。また、問いに答えよ。

最初に、微小変換に対する $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ の一般的な性質を考える。

- (1) 位置ベクトル $\mathbf{x}$ とその時間微分 $\dot{\mathbf{x}}$ の微小変換 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ および $\dot{\mathbf{x}} \rightarrow \dot{\mathbf{x}} + \delta\dot{\mathbf{x}}$ による $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ の変化は、

$$\delta L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{\partial L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \delta\mathbf{x} + \frac{\partial L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \cdot \delta\dot{\mathbf{x}} \quad \dots \textcircled{1}$$

で与えられる。オイラー・ラグランジュ方程式 ア を用いると、式①は、次式のように時間による全微分で表すことができる。

$$\delta L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{d}{dt} \left(\text{イ} \right) \quad \dots \textcircled{2}$$

- (2) 時間の微小並進 $t \rightarrow t + \varepsilon_0$ に対する $\mathbf{x}(t)$ および $\dot{\mathbf{x}}(t)$ の変化は、 ε_0 の 1 次までの近似で、次式で表される。ここで、 ε_0 は時間の微小並進を表す任意の微小量（定数）である。

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{x} &= \mathbf{x}(t + \varepsilon_0) - \mathbf{x}(t) = \text{ウ} \\ \delta\dot{\mathbf{x}} &= \dot{\mathbf{x}}(t + \varepsilon_0) - \dot{\mathbf{x}}(t) = \text{エ} \end{aligned}$$

これらを用いて式②を書き直すと、次式を得る。

$$\delta L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{d}{dt} \left(\text{オ} \right) \quad \dots \textcircled{3}$$

- (3) 空間の微小並進 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}$ に対する $\mathbf{x}$ および $\dot{\mathbf{x}}$ の変化は、 $\delta\mathbf{x} = \boldsymbol{\varepsilon}$ および $\delta\dot{\mathbf{x}} = \text{カ}$ である。ここで、 $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ は空間の微小並進を表す任意の微小ベクトル（定数ベクトル）である。これらを用いて式②を書き直すと、次式を得る。

$$\delta L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{d}{dt} \left(\text{キ} \right) \quad \dots \textcircled{4}$$

次に、一様な重力場中の質点を考える。質点の質量を m 、重力加速度を g とする。質点の位置座標を $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ とし、 x_3 軸を鉛直上向きにとると、ラグランジアンは次式で表される。

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - mgx_3 \quad \dots \textcircled{5}$$

- (4) 時間の微小並進によるラグランジアン⑤の変化を計算すると、 ε_0 の 1 次までの近似で、次式を得る。

$$L(\mathbf{x}(t + \varepsilon_0), \dot{\mathbf{x}}(t + \varepsilon_0)) = L(\mathbf{x}(t) + \text{ウ}, \dot{\mathbf{x}}(t) + \text{エ}) = \frac{1}{2} m [\dot{\mathbf{x}}(t)]^2 - mgx_3(t) + \text{ク}$$

従って、ラグランジアンの変化 $\delta L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ は、次式となる。

$$\delta L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = L(\mathbf{x}(t + \varepsilon_0), \dot{\mathbf{x}}(t + \varepsilon_0)) - L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \text{ク} \quad \dots \textcircled{6}$$

ここで、式⑤の時間微分 $\frac{dL}{dt}$ を用いると、式⑥は、次式のように、時間による全微分で表すこと

ができる。

$$\delta L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{d}{dt} \left(\boxed{\text{ケ}} \right) \quad \dots \textcircled{7}$$

式③と式⑦は、時間の微小並進による $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ の変化であり、等しい。従って、次式が恒等的に満たされる。

$$\frac{d}{dt} \left(\boxed{\text{コ}} \right) \varepsilon_0 = 0$$

ここで、 ε_0 は任意の微小量 ($\varepsilon_0 \neq 0$) であるから、

$$\frac{d}{dt} \left(\boxed{\text{コ}} \right) = 0 \quad \dots \textcircled{8}$$

が恒等的に満たされる。

(5) 空間の微小並進によるラグランジアン⑤の変化を計算すると、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ の 1 次までの近似で、次式を得る。

$$L(\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\mathbf{x}} + \boxed{\text{カ}}) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - mgx_3 + \boxed{\text{サ}}$$

従って、ラグランジアンの変化 $\delta L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ は、次式となる。

$$\delta L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = L(\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\mathbf{x}} + \boxed{\text{カ}}) - L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \boxed{\text{サ}} \quad \dots \textcircled{9}$$

ここで、 $\boxed{\text{サ}}$ が時間に依存しない定数であることに注意すると、式⑨は、次式のように時間による全微分で表すことができる。

$$\delta L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{d}{dt} \left(\boxed{\text{シ}} \right) \quad \dots \textcircled{10}$$

式④と式⑩は、空間の微小並進による $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ の変化であり、等しい。従って、次式が恒等的に満たされる。

$$\frac{d}{dt} \left(\boxed{\text{ス}} \right) \varepsilon_1 + \frac{d}{dt} \left(\boxed{\text{セ}} \right) \varepsilon_2 + \frac{d}{dt} \left(\boxed{\text{ソ}} \right) \varepsilon_3 = 0$$

ここで、 $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ は任意の微小量 ($\varepsilon_1 \neq 0, \varepsilon_2 \neq 0, \varepsilon_3 \neq 0$) であるから、

$$\frac{d}{dt} \left(\boxed{\text{ス}} \right) = 0 \quad \dots \textcircled{11}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\boxed{\text{セ}} \right) = 0 \quad \dots \textcircled{12}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\boxed{\text{ソ}} \right) = 0 \quad \dots \textcircled{13}$$

が恒等的に満たされる。

(6) 式⑧が表している保存量について簡潔に説明せよ。

(7) 式⑪と式⑫が表している保存量について簡潔に説明せよ。

(8) 式⑬が表している質点の運動について簡潔に説明せよ。

II	電磁気学
----	------

位置 $\mathbf{r}$, 時刻 t における電場を $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, 磁束密度を $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ とすると, 真空中のマクスウェル方程式は,

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \dots \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad \dots \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad \dots \quad (4)$$

と書ける。ここで, ε_0 と μ_0 は真空の誘電率および透磁率である。以下の問いに答えよ。

- (1) スカラーポテンシャル ϕ およびベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を用いて $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ を以下の式で表すと, 式(4)が恒等的に満たされることを示せ。

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

- (2) 上記のマクスウェル方程式から, 以下の式を導出することができる。

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \dots \quad (5)$$

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \dots \quad (6)$$

式(5)を導出せよ。必要ならば, $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{J}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{J}) - \nabla^2 \mathbf{J}$ を用いてもよい。ここで, $\mathbf{J}$ は任意のベクトルである。

式(5)と式(6)の解として, 以下の式(7)と式(8)を考える。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad \dots \quad (7)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad \dots \quad (8)$$

ここで, $\mathbf{k}$, ω はそれぞれ波数ベクトル, 角振動数 (角周波数) ($\omega > 0$) である。 $\mathbf{E}_0$ と $\mathbf{B}_0$ は定数ベクトルである。

- (3) $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}$, $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$, $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$, $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$ であることを示せ。
- (4) 波数ベクトルと角振動数（角周波数）の関係式である分散関係を導け。
- (5) 式⑦と式⑧で表される電磁場のエネルギー密度 $U(\mathbf{r}, t)$ を計算せよ。
- (6) 式⑦と式⑧で表される電磁場のポインティングベクトル $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ を計算せよ。
- (7) 電磁場のエネルギー密度 $U(\mathbf{r}, t)$ とポインティングベクトル $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ との間には

$$\frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = 0$$

の関係がある。この式の物理的意味を説明せよ。

広島大学大学院先進理工系科学研究科（博士課程前期）
物理学プログラム・量子物質科学プログラム（物理学分野） 入学試験問題

III	量子力学
-----	------

質点の調和振動（単振動）に関する以下の問いに答えよ。直交座標系 (x, y, z) で考える。プランク定数を 2π で割った定数を $\hbar$ とする。簡単のため、質点の質量を 1 とする。

最初に、 x 軸上で運動する質点（一次元調和振動子）のハミルトニアン

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2} \hat{p}_x^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \hat{x}^2$$

を考える。ここで、 ω は正の定数である。基底状態の波動関数を $\phi_0(x)$ とし、 n 番目の励起状態の波動関数を $\phi_n(x)$ とする。

- (1) ハミルトニアン $\hat{H}_1$ の基底状態の波動関数を $\phi_0(x) = N_0 e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2}$ と仮定して、時間に依存しないシュレディンガー方程式を満たすように、正の定数 α とエネルギー固有値を決めよ。さらに、第一励起状態の波動関数を $\phi_1(x) = N_1 x e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2}$ と仮定して、エネルギー固有値を求めよ。ここで、規格化定数 N_0 と N_1 は、 α を用いて次式のように表すことができる。

$$N_0 = (\alpha/\pi)^{1/4}$$
$$N_1 = (2\alpha)^{1/2}(\alpha/\pi)^{1/4}$$

- (2) 問(1) で求めた基底状態と第一励起状態のそれぞれに対して、位置座標の分散 $\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ を求めよ。ここで、 $\langle A \rangle$ は物理量 A の期待値である。

次に、 xy 平面内で運動する質点（二次元調和振動子）のハミルトニアン

$$\hat{H}_2 = \frac{1}{2} \hat{p}_x^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \hat{x}^2 + \frac{1}{2} \hat{p}_y^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \hat{y}^2$$

を考える。

- (3) 基底状態と第一励起状態の波動関数を、一次元調和振動子の波動関数 $\phi_0(x)$, $\phi_0(y)$, $\phi_1(x)$, $\phi_1(y)$ を用いて表せ。ただし、第一励起状態の波動関数は、線形独立な波動関数を全て求めよ。また、基底状態と第一励起状態のエネルギー固有値をそれぞれ求めよ。

ハミルトニアン $\hat{H}_2$ のもとで角運動量の z 成分は保存する。このことは、角運動量の z 成分のハイゼンベルク演算子 $\hat{L}_z(t)$ の時間微分 $\frac{d\hat{L}_z(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_2, \hat{L}_z(t)] = 0$ により確かめることができる。ここで、 $\hat{L}_z(t) = \hat{x}(t)\hat{p}_y(t) - \hat{y}(t)\hat{p}_x(t)$ である。

最後に、ハミルトニアン $\hat{H}_2$ に $\varepsilon\omega^2\hat{x}\hat{y}$ を加えたハミルトニアン

$$\hat{H}_3 = \hat{H}_2 + \varepsilon\omega^2\hat{x}\hat{y}$$

を考える。ただし、 ε は正の定数である。

(4) $\hat{H}_3$ のもとで角運動量の z 成分は保存しないことを示せ。

(5) 以下では波動関数 $\phi_n(x)\phi_m(y)$ (n, m は 0 または正の整数) に対応する状態を $|n, m\rangle$ で表すものとする。ハミルトニアン $\hat{H}_3$ のもとで角動量演算子の期待値の時間変化率

$$\frac{d}{dt}\langle 1, 0 | \hat{L}_z(t) | 1, 0 \rangle \quad \text{と} \quad \frac{d}{dt}\langle 0, 1 | \hat{L}_z(t) | 0, 1 \rangle$$

を時刻 $t = 0$ で求めよ。

IV	熱・統計力学
----	--------

一様磁場 $H > 0$ の中におかれたスピン $1/2$ をもつ N 個の粒子からなる磁性体を考える。各粒子のエネルギーは $\varepsilon_+ = +\mu H$, $\varepsilon_- = -\mu H$ の 2 つの値をとるものとする。ここで、 $\mu > 0$ は磁気モーメントの大きさである。磁気モーメント間の相互作用は無視できるものとする。 i 番目 ($i = 1, 2, \dots, N$) の粒子の磁気モーメント μ_i を用いると、この系のハミルトニアンは、

$$\mathcal{H}(\{\mu_i\}) = - \sum_{i=1}^N \mu_i H$$

である。ここで、 $\{\mu_i\}$ は N 個の粒子の磁気モーメントの配位を表し、 μ_i は $+\mu$ または $-\mu$ の値をとる。以下の問いに答えよ。ただし、ボルツマン定数を k とせよ。

- (1) 系はカノニカル分布に従うものとする。温度 T の平衡状態にあるときの分配関数 Z を求めよ。また、この系の自由エネルギー $F(T, H)$ を求めよ。

- (2) 系が温度 T の平衡状態にあるときの全磁化

$$M = \left\langle \sum_{i=1}^N \mu_i \right\rangle$$

を求めよ。ここで、 $\langle \dots \rangle$ はカノニカル分布における統計平均である。また、全磁化の揺らぎ

$$\Delta M^2 = \left\langle \left(\sum_{i=1}^N \mu_i \right)^2 \right\rangle - M^2$$

を計算し、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta M}{M}$$

を求めよ。

- (3) 系が温度 T の平衡状態にあるときのエントロピー S を求めよ。さらに、エントロピーの $T \rightarrow 0$ と $T \rightarrow \infty$ の極限の値を求め、温度依存性のグラフの概形を示せ。
- (4) 系が温度 T の平衡状態にあるときの熱容量 C を求めよ。また、A さんはこの系のエントロピーの温度依存性を知らないが、ある磁場 H における温度の関数としての熱容量 $C(T, H)$ を（測定などにより）知っているとする。この磁場 H におけるエントロピーの温度依存性を得るためには、A さんはどのようにすればよいであろうか？ エントロピーと熱容量の関係式を用いて述べよ。
- (5) 次に、同じ系をミクロカノニカル分布を用いて考える。系の内部エネルギーが U であるとき、 $\mu_i = +\mu$ である粒子の数を N_+ 、 $\mu_i = -\mu$ である粒子の数を N_- とする。このときの状態数 $W(N, U)$ を求めよ。答えは N と $N' = N_+ - N_-$ を用いて書け。

- (6) 内部エネルギーが U であるときのエントロピー S と温度 T を求めよ。 $n \gg 1$ に対するスターリングの公式 $\log n! \simeq n \log n - n$ を用いてよい。また、正の定数 α に対して、

$$\frac{S(\alpha N, \alpha U)}{S(N, U)} \quad \text{と} \quad \frac{T(\alpha N, \alpha U)}{T(N, U)}$$

をそれぞれ求めよ。 S のような α 依存性を示す熱力学変数, T のような α 依存性を示す熱力学変数をそれぞれ何と呼ぶか? その名称を書け。