

令和7年度広島大学理学部

数学科

第3年次編入学試験学力検査問題

筆記試験（微積分，線形代数）（5問）

令和6年9月10日

自 9時00分

至 12時00分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には，微積分と線形代数の問題が計5問ある。総ページは，表紙を入れて6ページである。
- 2 解答用紙は，5枚ある。解答はすべて問題番号と同じ番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入すること。
- 3 下書き用紙は，各受験者に2枚ある。
- 4 受験番号は，すべての解答用紙と下書き用紙の所定の欄に必ず記入すること。
- 5 配付した解答用紙，下書き用紙は，持ち出さないこと。

[1] a を 1 より大きい実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a^{-nx}$ が収束するようなすべての実数 x のなす集合 I を求めよ。

(2) I を (1) のものとし, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{-nx} \quad (x \in I)$$

で定める。次の (i), (ii) に答えよ。

(i) I 上で f の導関数 f' を求めよ。

(ii) I 上で f の原始関数を 1 つ求めよ。

(3) 実数 b, c は $0 < b < c$ を満たすとする。このとき, 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} na^{-nx}$ が閉区間 $[b, c]$ で一様収束することを示せ。

[2] A を 3 つの固有値 $1, 2, 3$ をもつ 3×3 行列とする。また

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は固有値 1 に対する A の固有ベクトル,

$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ は固有値 2 に対する A の固有ベクトル,

$\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$ は固有値 3 に対する A の固有ベクトル

であるとする。以下の問いに答えよ。

- (1) A^2 のすべての固有値を求めよ。また、各固有値に対する固有ベクトルを 1 つ与えよ。
- (2) 行列 A を求めよ。
- (3) 行列 $A^5 - 6A^4 + 10A^3 - 10A$ を求めよ。
- (4) 線形写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$f(\boldsymbol{x}) = (A^5 - 6A^4 + 10A^3 - 10A)\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$$

で定める。 f が全単射であることを示せ。

[3] 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx$$

と定める。以下の問いに答えよ。

(1) I_1 を求めよ。

(2) n を自然数とする。定積分

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx$$

を I_n と I_{n+1} を用いて表せ。

(3) 任意の自然数 n に対して

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n} \left\{ \frac{1}{2^n} + (2n - 1)I_n \right\}$$

が成り立つことを示せ。

(4) n を自然数とする。定積分

$$A = \int_0^{\pi/4} \cos^{2n} x dx \quad \text{と} \quad B = \int_0^{\pi/4} (\sin x + \cos x)^{2n} dx$$

を n と I_{n+1} を用いて表せ。

[4] 3×3 行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 6 \\ -5 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

で定める。以下の問いに答えよ。

- (1) A のすべての固有値を求めよ。また、各固有値 λ に対して、固有空間 $V(\lambda) = \{x \in \mathbb{C}^3 \mid Ax = \lambda x\}$ の基底を 1 組与えよ。
- (2) A の各固有値 λ に対して $W(\lambda) = \{Ax - \lambda x \mid x \in \mathbb{C}^3\}$ の次元を求めよ。
- (3) 次の 2 つの条件を満たすベクトル $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{C}^3$ を 1 組与えよ。
 - $j = 1, 2, 3$ について、 p_j は A の固有ベクトルであり、かつ B の固有ベクトルでもある。
 - p_1, p_2, p_3 は \mathbb{C} 上一次独立である。

(4) 2×2 行列 C, D を

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

で定める。このとき、 C と D の両方の固有ベクトルであるような $p \in \mathbb{C}^2$ は存在しないことを示せ。

[5] $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2 - y^2) \sin y}{\sqrt{x^4 + y^4}} & ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1) f が点 $(0, 0)$ で連続であることを示せ。

(2) 任意の実数 $x \neq 0$ に対して $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ を求めよ。

(3) f が点 $(0, 0)$ で偏微分可能であるか否かを答え、それを証明せよ。

(4) f が点 $(0, 0)$ で全微分可能であるか否かを答え、それを証明せよ。