広島大学大学院先進理工系科学研究科（博士課程前期）入学試験問題

物理学プログラム
量子物質科学プログラム（物理学分野）

専 門 科 目

2024 年 8 月 22 日　9:00～12:00

注意事項

（1）以下の用紙が配付されている。

問題用紙（表紙を含む）	9 枚
解答用紙	4 枚
下書用紙	1 枚

（2）問題は全部で４問あり，［Ⅰ］～［Ⅳ］の問題番号および出題科目名を$\boxed{}$に示してある。これら全ての問題について解答せよ。

（3）解答は問題ごとに指定の用紙を用いること。解答方法が特に指定されている場合を除き，最終的な答えだけでなく，解答に至った考え方や途中計算も示せ。紙面が不足した場合は表面に「裏面に続く」と明記し，裏面に記入せよ。

（4）解答用紙および下書用紙の全てに受験番号を記入せよ。

（5）試験終了後，全ての解答用紙および下書用紙を提出せよ。

広島大学大学院先進理工系科学研究科（博士課程前期）
物理学プログラム・量子物質科学プログラム（物理学分野）　入学試験問題

I	力学

微小変換に対するラグランジアン $L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})$ の変化と保存量に関する以下の文章の $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{ソ}}$ に入る適切な式を書け。また，問いに答えよ。

最初に，微小変換に対する $L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})$ の一般的な性質を考える。

(1) 位置ベクトル$\boldsymbol{x}$とその時間微分$\dot{\boldsymbol{x}}$の微小変換 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}$ および $\dot{\boldsymbol{x}}\to\dot{\boldsymbol{x}}+\delta\dot{\boldsymbol{x}}$によるL$(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})$の変化は，

$$\delta L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})=\frac{\partial L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot\delta\boldsymbol{x}+\frac{\partial L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\cdot\delta\dot{\boldsymbol{x}}\quad\cdots①$$

で与えられる。オイラー・ラグランジュ方程式 $\boxed{\text{ア}}$ を用いると，式①は，次式のように時間による全微分で表すことができる。

$$\delta L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})=\frac{d}{dt}\left(\boxed{\quad\text{イ}\quad}\right)\quad\cdots②$$

(2) 時間の微小並進 $t\to t+\varepsilon_0$ に対する $\boldsymbol{x}(t)$ および $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ の変化は，ε_0 の１次までの近似で，次式で表される。ここで，ε_0 は時間の微小並進を表す任意の微小量（定数）である。

$$\delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t+\varepsilon_0)-\boldsymbol{x}(t)=\boxed{\quad\text{ウ}\quad}$$
$$\delta\dot{\boldsymbol{x}}=\dot{\boldsymbol{x}}(t+\varepsilon_0)-\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boxed{\quad\text{エ}\quad}$$

これらを用いて式②を書き直すと，次式を得る。

$$\delta L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})=\frac{d}{dt}\left(\boxed{\quad\text{オ}\quad}\right)\cdots③$$

(3) 空間の微小並進 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varepsilon}$ に対する $\boldsymbol{x}$ および $\dot{\boldsymbol{x}}$ の変化は，$\delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varepsilon}$ および $\delta\dot{\boldsymbol{x}}=\boxed{\quad\text{カ}\quad}$ である。ここで，$\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$は空間の微小並進を表す任意の微小ベクトル（定数ベクトル）である。これらを用いて式②を書き直すと，次式を得る。

$$\delta L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})=\frac{d}{dt}\left(\boxed{\quad\text{キ}\quad}\right)\quad\cdots④$$

次に，一様な重力場中の質点を考える。質点の質量をm，重力加速度をg とする。質点の位置座標を$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ とし，x_3軸を鉛直上向きにとると，ラグランジアンは次式で表される。

$$L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})=\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2-mgx_3\quad\cdots⑤$$

(4) 時間の微小並進によるラグランジアン⑤の変化を計算すると，ε_0の１次までの近似で，次式を得る。

$$L\big(\boldsymbol{x}(t+\varepsilon_0),\dot{\boldsymbol{x}}(t+\varepsilon_0)\big)=L\left(\boldsymbol{x}(t)+\boxed{\text{ウ}},\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\boxed{\text{エ}}\right)=\frac{1}{2}m[\dot{\boldsymbol{x}}(t)]^2-mgx_3(t)+\boxed{\quad\text{ク}\quad}$$

従って，ラグランジアンの変化 $\delta L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})$ は，次式となる。

$$\delta L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})=L\big(\boldsymbol{x}(t+\varepsilon_0),\dot{\boldsymbol{x}}(t+\varepsilon_0)\big)-L\big(\boldsymbol{x}(t),\dot{\boldsymbol{x}}(t)\big)=\boxed{\quad\text{ク}\quad}\quad\cdots⑥$$

ここで，式⑤の時間微分 $\frac{dL}{dt}$ を用いると，式⑥は，次式のように，時間による全微分で表すこと

ができる。

$$\delta L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}) = \frac{d}{dt}\left(\boxed{\quad ケ \quad}\right) \quad \cdots ⑦$$

式③と式⑦は，時間の微小並進による$L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})$の変化であり，等しい。従って，次式が恒等的に満たされる。

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\quad コ \quad}\right)\varepsilon_0 = 0$$

ここで，ε_0 は任意の微小量（$\varepsilon_0 \neq 0$）であるから，

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\quad コ \quad}\right) = 0 \quad \cdots ⑧$$

が恒等的に満たされる。

(5) 空間の微小並進によるラグランジアン⑤の変化を計算すると，$\boldsymbol{\varepsilon}$ の１次までの近似で，次式を得る。

$$L\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varepsilon},\dot{\boldsymbol{x}}+\boxed{カ}\right) = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 - mgx_3 + \boxed{\quad サ \quad}$$

従って，ラグランジアンの変化 $\delta L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})$ は，次式となる。

$$\delta L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}) = L\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varepsilon},\dot{\boldsymbol{x}}+\boxed{カ}\right) - L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}) = \boxed{\quad サ \quad} \quad \cdots ⑨$$

ここで，$\boxed{\quad サ \quad}$ が時間に依存しない定数であることに注意すると，式⑨は，次式のように時間による全微分で表すことができる。

$$\delta L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}) = \frac{d}{dt}\left(\boxed{\quad シ \quad}\right) \quad \cdots ⑩$$

式④と式⑩は，空間の微小並進による$L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})$の変化であり，等しい。従って，次式が恒等的に満たされる。

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\quad ス \quad}\right)\varepsilon_1 + \frac{d}{dt}\left(\boxed{\quad セ \quad}\right)\varepsilon_2 + \frac{d}{dt}\left(\boxed{\quad ソ \quad}\right)\varepsilon_3 = 0$$

ここで，$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ は任意の微小量（$\varepsilon_1 \neq 0, \varepsilon_2 \neq 0, \varepsilon_3 \neq 0$）であるから，

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\quad ス \quad}\right) = 0 \quad \cdots ⑪$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\quad セ \quad}\right) = 0 \quad \cdots ⑫$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\quad ソ \quad}\right) = 0 \quad \cdots ⑬$$

が恒等的に満たされる。

(6) 式⑧が表している保存量について簡潔に説明せよ。

(7) 式⑪と式⑫が表している保存量について簡潔に説明せよ。

(8) 式⑬が表している質点の運動について簡潔に説明せよ。

広島大学大学院先進理工系科学研究科（博士課程前期）
物理学プログラム・量子物質科学プログラム（物理学分野）　入学試験問題

II	電磁気学

位置 $\boldsymbol{r}$，時刻 t における電場を $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$，磁束密度を $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ とすると，真空中のマクスウェル方程式は，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=0 \quad \cdots \quad ①$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=0 \quad \cdots \quad ②$$
$$\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)-\varepsilon_0\,\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=0 \quad \cdots \quad ③$$
$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=0 \quad \cdots \quad ④$$

と書ける。ここで，ε_0 と μ_0 は真空の誘電率および透磁率である。以下の問いに答えよ。

(1) スカラーポテンシャル ϕ およびベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いて $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ を以下の式で表すと，式④が恒等的に満たされることを示せ。

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$$
$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

(2) 上記のマクスウェル方程式から，以下の式を導出することができる。

$$\left(\nabla^2-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=0 \quad \cdots \quad ⑤$$
$$\left(\nabla^2-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=0 \quad \cdots \quad ⑥$$

式⑤を導出せよ。必要ならば，$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{J})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{J})-\nabla^2\boldsymbol{J}$ を用いてもよい。ここで，$\boldsymbol{J}$ は任意のベクトルである。

式⑤と式⑥の解として，以下の式⑦と式⑧を考える。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t) \quad \cdots \quad ⑦$$
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{B}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t) \quad \cdots \quad ⑧$$

ここで，$\boldsymbol{k}$, ω はそれぞれ波数ベクトル，角振動数（角周波数）$(\omega>0)$ である。$\boldsymbol{E}_0$ と $\boldsymbol{B}_0$ は定数ベクトルである。

(3) $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = \omega \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{B}$ であることを示せ。

(4) 波数ベクトルと角振動数（角周波数）の関係式である分散関係を導け。

(5) 式⑦と式⑧で表される電磁場のエネルギー密度 $U(\boldsymbol{r}, t)$ を計算せよ。

(6) 式⑦と式⑧で表される電磁場のポインティングベクトル $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}, t)$ を計算せよ。

(7) 電磁場のエネルギー密度 $U(\boldsymbol{r}, t)$ とポインティングベクトル $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}, t)$ との間には

$$\frac{\partial U(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}, t) = 0$$

の関係がある。この式の物理的意味を説明せよ。

広島大学大学院先進理工系科学研究科（博士課程前期）
物理学プログラム・量子物質科学プログラム（物理学分野）　入学試験問題

III	量子力学

質点の調和振動（単振動）に関する以下の問いに答えよ。直交座標系(x,y,z)で考える。プランク定数を 2π で割った定数を $\hbar$ とする。簡単のため，質点の質量を 1 とする。

最初に，x軸上で運動する質点（一次元調和振動子）のハミルトニアン

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2}\hat{p}_x^2 + \frac{1}{2}\omega^2\hat{x}^2$$

を考える。ここで，ωは正の定数である。基底状態の波動関数を$\phi_0(x)$とし，n 番目の励起状態の波動関数を$\phi_n(x)$とする。

(1) ハミルトニアン$\hat{H}_1$の基底状態の波動関数を $\phi_0(x) = N_0\, e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2}$ と仮定して，時間に依存しないシュレディンガー方程式を満たすように，正の定数 α とエネルギー固有値を決めよ。さらに，第一励起状態の波動関数を $\phi_1(x) = N_1 x\, e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2}$ と仮定して，エネルギー固有値を求めよ。ここで，規格化定数 N_0 と N_1 は，α を用いて次式のように表すことができる。

$$N_0 = (\alpha/\pi)^{1/4}$$
$$N_1 = (2\alpha)^{1/2}(\alpha/\pi)^{1/4}$$

(2) 問(1) で求めた基底状態と第一励起状態のそれぞれに対して，位置座標の分散 $\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$ を求めよ。ここで，$\langle A\rangle$ は物理量 A の期待値である。

次に，xy平面内で運動する質点（二次元調和振動子）のハミルトニアン

$$\hat{H}_2 = \frac{1}{2}\hat{p}_x^2 + \frac{1}{2}\omega^2\hat{x}^2 + \frac{1}{2}\hat{p}_y^2 + \frac{1}{2}\omega^2\hat{y}^2$$

を考える。

(3) 基底状態と第一励起状態の波動関数を，一次元調和振動子の波動関数 $\phi_0(x)$，$\phi_0(y)$，$\phi_1(x)$，$\phi_1(y)$ を用いて表せ。ただし，第一励起状態の波動関数は，線形独立な波動関数を全て求めよ。また，基底状態と第一励起状態のエネルギー固有値をそれぞれ求めよ。

ハミルトニアン$\hat{H}_2$のもとで角運動量のz成分は保存する。このことは，角運動量のz成分のハイゼンベルク演算子 $\hat{L}_z(t)$ の時間微分 $\frac{d\hat{L}_z(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_2, \hat{L}_z(t)\right] = 0$ により確かめることができる。ここで，$\hat{L}_z(t) = \hat{x}(t)\hat{p}_y(t) - \hat{y}(t)\hat{p}_x(t)$ である。

最後に，ハミルトニアン $\hat{H}_2$ に $\varepsilon\omega^2\hat{x}\hat{y}$ を加えたハミルトニアン

$$\hat{H}_3 = \hat{H}_2 + \varepsilon\omega^2\hat{x}\hat{y}$$

を考える。ただし，ε は正の定数である。

(4) $\hat{H}_3$のもとで角運動量のz成分は保存しないことを示せ。

(5) 以下では波動関数 $\phi_n(x)\phi_m(y)$ (n, m は 0 または正の整数)に対応する状態を $|n,m\rangle$ で表すものとする。ハミルトニアン $\hat{H}_3$ のもとで角動量演算子の期待値の時間変化率

$$\frac{d}{dt}\langle 1,0|\hat{L}_z(t)|1,0\rangle \quad と \quad \frac{d}{dt}\langle 0,1|\hat{L}_z(t)|0,1\rangle$$

を時刻 $t=0$ で求めよ。

広島大学大学院先進理工系科学研究科（博士課程前期）
物理学プログラム・量子物質科学プログラム（物理学分野）　入学試験問題

Ⅳ	熱・統計力学

一様磁場 $H>0$ の中におかれたスピン 1/2 をもつ N 個の粒子からなる磁性体を考える。各粒子のエネルギーは $\varepsilon_+=+\mu H$, $\varepsilon_-=-\mu H$ の 2 つの値をとるものとする。ここで，$\mu>0$ は磁気モーメントの大きさである。磁気モーメント間の相互作用は無視できるものとする。i 番目$(i=1,2,\cdots,N)$の粒子の磁気モーメント μ_i を用いると，この系のハミルトニアンは，

$$\mathcal{H}(\{\mu_i\})=-\sum_{i=1}^{N}\mu_i H$$

である。ここで，$\{\mu_i\}$ は N 個の粒子の磁気モーメントの配位を表し，μ_i は $+\mu$ または $-\mu$ の値をとる。以下の問いに答えよ。ただし，ボルツマン定数を k とせよ。

(1) 系はカノニカル分布に従うものとする。温度 T の平衡状態にあるときの分配関数 Z を求めよ。また，この系の自由エネルギー $F(T,H)$ を求めよ。

(2) 系が温度 T の平衡状態にあるときの全磁化

$$M=\left\langle\sum_{i=1}^{N}\mu_i\right\rangle$$

を求めよ。ここで，$\langle\cdots\rangle$ はカノニカル分布における統計平均である。また，全磁化の揺らぎ

$$\Delta M^2=\left\langle\left(\sum_{i=1}^{N}\mu_i\right)^2\right\rangle-M^2$$

を計算し，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\Delta M}{M}$$

を求めよ。

(3) 系が温度 T の平衡状態にあるときのエントロピー S を求めよ。さらに，エントロピーの $T\to 0$ と $T\to\infty$ の極限の値を求め，温度依存性のグラフの概形を示せ。

(4) 系が温度 T の平衡状態にあるときの熱容量 C を求めよ。また，A さんはこの系のエントロピーの温度依存性を知らないが，ある磁場 H における温度の関数としての熱容量 $C(T,H)$ を（測定などにより）知っているとする。この磁場 H におけるエントロピーの温度依存性を得るためには，A さんはどのようにすればよいであろうか？　エントロピーと熱容量の関係式を用いて述べよ。

(5) 次に，同じ系をミクロカノニカル分布を用いて考える。系の内部エネルギーが U であるとき，$\mu_i=+\mu$ である粒子の数を N_+，$\mu_i=-\mu$ である粒子の数を N_- とする。このときの状態数 $W(N,U)$ を求めよ。答えは N と $N'=N_+-N_-$ を用いて書け。

(6) 内部エネルギーが U であるときのエントロピー S と温度 T を求めよ。$n \gg 1$ に対するスターリングの公式 $\log n! \simeq n \log n - n$ を用いてよい。また，正の定数 α に対して，

$$\frac{S(\alpha N, \alpha U)}{S(N, U)} \quad \text{と} \quad \frac{T(\alpha N, \alpha U)}{T(N, U)}$$

をそれぞれ求めよ。S のような α 依存性を示す熱力学変数，T のような α 依存性を示す熱力学変数をそれぞれ何と呼ぶか？　その名称を書け。