

実施期日 : 令和6年11月16日(土)

試験時間 : 9時30分～11時30分

注意事項

- 1 この問題冊子の総ページは9 ページです。
- 2 解答用紙は3 枚あります。解答はすべて解答用紙の所定の場所に記入してください。
- 3 受験番号は、すべての解答用紙の所定の欄に必ず記入してください。
- 4 解答用紙は持ち帰ってはいけません。
- 5 問題冊子は持ち帰ってください。
- 6 受験票、黒鉛筆、シャープペンシル、消しゴム、鉛筆キャップ、鉛筆削り、計時機能だけの時計、眼鏡、ハンカチ、袋などから中身だけを取り出したティッシュペーパー及び目薬以外の所持品は、机の下に置いてください。

空 欄

空 欄

[ 1 ] 以下の問いに答えよ。

(1) 二つの2次方程式  $x^2 - (k-3)x + 3k + 2 = 0$  と  $x^2 + (k-1)x + k + 6 = 0$  がただ1つの実数を共通解としてもつとき、実数の定数  $k$  の値と、そのときの共通解を求めよ。

(2) 実数  $x, y$  が  $x^2 + y^2 = 4$  を満たすとき、 $2x^2 + 3y^2 + 2y$  の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの  $x, y$  の値を求めよ。

(3) 正の実数  $x, y$  が  $xy = 4$  を満たすとき、 $(\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2$  の最小値を求めよ。また、そのときの  $x, y$  の値を求めよ。

空 欄

[ 2 ] 整数  $a, b$  および 2 以上の整数  $p$  に対して,  $a - b$  が  $p$  の倍数であるとき,  $a$  と  $b$  は  $p$  を法として合同であるといい

$$a \equiv b \pmod{p}$$

と表す。以下の問いに答えよ。ただし, 次に示す性質を用いて良い。

性質

整数  $a, b, c, d$  および 2 以上の整数  $p$  に対して,  $a \equiv b \pmod{p}$  かつ  $c \equiv d \pmod{p}$  ならば, 次のことが成り立つ。

$$(i) a + c \equiv b + d \pmod{p} \quad (ii) a - c \equiv b - d \pmod{p} \quad (iii) ac \equiv bd \pmod{p}$$

(1)  $10 \equiv -1 \pmod{11}$  となることを示せ。

(2)  $100 \equiv 1 \pmod{11}$  となることを示せ。

(3)  $n$  を正の整数とする。  $10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}$  を証明せよ。

(4)  $n$  桁の正の整数  $N = \sum_{k=0}^{n-1} a_k 10^k = a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1 a_0$  を考える。ここで,  $a_k$  は  $k+1$  桁目の数字を表し,  $a_{n-1}$  は 1 から 9 までの整数のいずれか,  $a_{n-2}, \dots, a_0$  は 0 から 9 までの整数のいずれかである。また, 整数  $M$  を次のように定義する。

$$M = (\text{添え字 } k \text{ が偶数の } a_k \text{ の総和}) - (\text{添え字 } k \text{ が奇数の } a_k \text{ の総和})$$

例えば,  $N = 12345$  の場合,  $M = (a_0 + a_2 + a_4) - (a_1 + a_3) = (5 + 3 + 1) - (4 + 2) = 3$  となる。

$N \equiv M \pmod{11}$  であることを証明せよ。

(5) 右から読んでも左から読んでも同じ数字の列となっている数を回文数という。例えば 12321 や 135531 は回文数である。桁数が偶数の回文数が 11 で割り切れることを示せ。

空 欄

[ 3 ] 二人のプレイヤーが二つのサイコロ A, サイコロ B を使って以下のゲームをする。ただし、いずれのサイコロもすべての面が同じ確率で出るものとする。以下の問いに答えよ。

ゲームのルール

- (a) サイコロ A は 1 から 6 までの面が一つずつある。
- (b) サイコロ B は 1,2,4 の面が一つずつ, 3 の面が三つある。
- (c) 先攻と後攻を決めて、先攻 → 後攻の順番でサイコロを振り、より大きな数字が出た方の勝ちとする。
- (d) 先攻はサイコロ A とサイコロ B のいずれか一つを選んで振ることができる。
- (e) 後攻は、先攻の結果を見てから、サイコロ A とサイコロ B のいずれか一つを選んで振ることができる。
- (f) 異なるサイコロで同じ数字が出た場合はサイコロ B を使った方を勝ちとする。
- (g) 同じサイコロで同じ数字が出た場合は先攻の勝ちとする。

(1) 先攻がサイコロ A を使って  $x$  ( $= 1, \dots, 6$ ) の数字が出た。後攻がサイコロ A を使って勝つ確率を  $x = 1, \dots, 6$  のそれぞれの場合について求めよ。

(2) 先攻がサイコロ A を使って  $x$  ( $= 1, \dots, 6$ ) の数字が出た。後攻がサイコロ B を使って勝つ確率を  $x = 1, \dots, 6$  のそれぞれの場合について求めよ。

(3) 先攻がサイコロ A を使うとき、後攻が勝つ確率を求めよ。ただし、後攻は先攻の結果を見てから、図 1 のルールに従ってサイコロを選ぶものとする。

(4) 先攻はどちらのサイコロを選ぶ方が良いと考えられるか。先攻が勝つ確率を算出して考察せよ。ただし、後攻は先攻の結果を見てから、図 1 のルールに従ってサイコロを選ぶものとする。

図 1 : 後攻がサイコロを選ぶルール

- (i) 後攻 (自分) が勝つ確率が大きくなるサイコロを選ぶ。
- (ii) どちらのサイコロを使っても後攻 (自分) が勝つ確率が同じになる場合は、サイコロ A を選ぶ。

空 欄