線形代数学ノート

広島大学情報科学部

参考書について

本講義では，このプリントを教科書として使用しますが，より詳しい話を知りたい方は下記のテキストを参考書としてご利用ください．

専門基礎 線形代数学，久保富士男 監修／栗田多喜夫・飯間信・河村尚明 共著，培風館，2017 年

本ノートで例えば「テキスト 1P」と書いてある箇所の詳細な説明は，上記の参考書の 1 ページを参照してください．

1　定義と用語

定義 1 (行列の定義，テキスト 1P)**.** m, n を自然数とし, mn 個の数 a_{ij} $(i = 1, \cdots, m;\ j = 1, \cdots, n)$ を以下のように長方形に並べたものを **(m 行 n 列の) 行列** あるいは **$m \times n$ 行列** という．

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

横に並んだ数の組を **行**, 縦に並んだ数の組を **列** といい, 行の数と列の数の組 (m, n) を **行列の型** という．

定義 2 (行列の定義（つづき）)**.**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

上から第 i 番目の行を第 i 行，左から第 j 番目の列を第 j 列という．

第 i 行と第 j 列が交わる位置の数 a_{ij} をその行列の **(i, j) 成分** という．

コメント

この講義では,

- “数” とは通常の意味での四則演算ができる **有理数** , **実数** , あるいは, **複素数** のいずれかを意味するものとする.
- 行列と対比して, 単一の数を **スカラー** ということがある.
- スカラーは小文字 $a, b, c, \cdots$, 行列は大文字 $A, B, C, \cdots$ で表す.
- 行列 A の (i, j) 成分が a_{ij} であるとき, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$,　$A = [a_{ij}]$ などと書く.
- また，行列の成分を囲む [　] は (　) とする場合もある.
- 1×1 行列 $\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$ は, その成分と同一視して a と書く.
- 行列の成分は **実数** または **複素数** のいずれかとする.
- 成分が全て実数 (複素数) の行列を **実行列 (複素行列)** という.

例 1. $A = \begin{bmatrix} 2-i & 2 \end{bmatrix}$,　$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$,　$B_2 = \begin{bmatrix} 1.2 & 2.4 & 3.6 \\ -\sqrt{2} & 5-\pi & \log 2 \end{bmatrix}$

(ただし, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする.)

ここで, A は複素行列であるが, B_1, B_2 は実行列, 複素行列のいずれとみなしてもよい.

定義 3 (正方行列とその対角成分の定義，テキスト 11P)**.** $n \times n$ 行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{an} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

を **n 次正方行列** と呼ぶ． 正方行列 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ に対し，成分 a_{ii} $(i = 1, \cdots, n)$ を, A の **対角成分** という.

コメント

正方行列の成分は正方形に並んでいる．対角成分は，その正方形における右下がりの対角線上の成分のことである.

定義 4 (行ベクトル・列ベクトルの定義，テキスト 3P)**.** $1 \times n$ 行列を **(n 次の) 行ベクトル** , $m \times 1$ 行列を **(m 次の) 列ベクトル** という．これら両者をまとめて **ベクトル** (あるいは, **数ベクトル**) という.

コメント

- 成分が全て実数 (複素数) であるベクトルを **実 (複素) ベクトル** とよぶことがある.
- 数ベクトルは太字の小文字 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \cdots$ を用いて表すことが多い.

行列の行ベクトル，列ベクトルの例

行列 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ の第 i 行は n 次行ベクトル $\boldsymbol{a}'_i$ とみなせる． 同様に, A の第 j 列は m 次列ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ とみなせる． 具体的に書くと,

$$\boldsymbol{a}'_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \text{(行ベクトル)}$$

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \text{(列ベクトル)}$$

行列のベクトル表示，テキスト 7P

行列 A は行ベクトル $\boldsymbol{a}'_1, \cdots, \boldsymbol{a}'_m$ を縦に並べたもの, あるいは列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を横に並べたものと考えることもできる.

このような行列の表示をそれぞれ **行ベクトル表示** , あるいは **列ベクトル表示** という.

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_m \end{bmatrix} \text{(行ベクトル表示)} \qquad A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \text{(列ベクトル表示)}$$

定義 5 (零行列, 零ベクトルの定義，テキスト 3P)**.** (1) 成分が全て 0 の行列を **零行列** といい，O, $O_{m\times n}$ (特に, $O_n = O_{n\times n}$) 等と表す． (2) 成分が全て 0 のベクトルを **零ベクトル** といい, $\mathbf{0}$ と書く.

定義 6 (単位行列の定義，テキスト 11P)**.** 対角成分が全て 1 である対角行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

を **単位行列** と呼び, E と書く.

型を明示したい場合，$E_n \,(= E_{n\times n})$ のように書くこともある.

相等の定義，テキスト 2P

二つの行列 A, B の型が同じで, 更に, それぞれの各成分の値が全て一致する場合に, A と B は **等しい** といい,

$$A = B$$

と書く.

例題 1 (テキスト 2P)**.** 行列 $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ に対して，(1) A の型を述べよ． (2) B の成分の中で 3 となるものを全て答えよ． (3) $A = B$ となるようなスカラー a, b, c, d を求めよ.

各自で，ちょっと考えてみてください！

2 行列の演算: 加法，減法，スカラー倍

定義 7 (テキスト 4P)**.** 行列 A, B の和 $A + B$ は，A と B の型が同じ場合にのみ，それぞれの成分同士の和と差を取ることで定義される.

すなわち, $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ とすると,

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

行列の和の例

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 11 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

定義 8 (テキスト 5P)**.** 行列 A の c 倍は, A の全ての成分を c 倍することにより定義される. $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ とすると,

$$c\,A=[c\,a_{ij}]_{m\times n}$$

スカラー倍の例

$$3\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 24 \\ 6 & 15 & -3 \end{bmatrix}$$

$$a\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & a \\ 4a & 3a \end{bmatrix}$$

行列の差の定義，テキスト 5P

- $(-1)B=-B$ と表す.
- 行列の差

$$A+(-1)B=A+(-B)=A-B$$

を行列 A,B の差という.

行列の差の性質

$$A-B=O \Longleftrightarrow A=B$$

定理 1 (テキスト 5P)**.** 任意の $m\times n$ 行列 A,B,C とスカラー a,b に対して, 次が成り立つ:

(1) $A+B=B+A$.
(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$.
(3) $A+O=O+A=A$.
(4) $A+(-A)=(-A)+A=O$.
(5) $a(bA)=(ab)A$.
(6) $(a+b)A=aA+bA$.
(7) $a(A+B)=aA+aB$.
(8) $0\,A=O$, $1\,A=A$.

証明 成分を計算することで直ちに導かれる. 確かめておいてください ∎

例題 2 (テキスト 5P)**.** 2 つの 2×2 行列 $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $E=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする.

(1) $A+\dfrac{1}{2}B=E$ となるような 2×2 行列 B を求めよ.

解答 (1) $A+\dfrac{1}{2}B=E$ の両辺に $-A$ を加えると、$\dfrac{1}{2}B=E-A$ である．これから，$B=2(E-A)$ である．これに，$A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}, E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ を代入すると

$$\begin{aligned}
B=2(E-A)&=2\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}\right)\\
&=2\left(\begin{bmatrix}0 & -4\\ -2 & -2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & -8\\ -4 & -4\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

3　行列の演算: 積

定義 9 (行列の積の定義，テキスト 6P)**.** 行列 A, B の積 AB は, A の列の数と B の行の数が等しい場合にのみ, 次のような形で定義される.

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{n\times l}$ とするとき,

$AB=C$ は $m\times l$ 行列であり，$C=[c_{ij}]_{m\times l}$ は以下のように定義される.

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$
$$(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,l)$$

コメント

積の定義式は複雑に見えるが, 実際に A, B の成分を並べてみればわかるように, A の第 i 行と B の第 j 列との間で成分同士の積を足し上げたものである.

$$\begin{array}{ccc}
 & & \text{第 } j \text{ 列}\\
\text{第 } i \text{ 行} & \begin{bmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n}\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in}\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
a_{m1} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}
b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1l}\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
b_{k1} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kl}\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nl}
\end{bmatrix}
\end{array}$$

例 2.

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & -5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & 4 & 1\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}2\times3+1\times2+(-3)\times(-1) & 2\times1+1\times0+(-3)\times4 & 2\times0+1\times(-1)+(-3)\times1\\ 1\times3+(-5)\times2+2\times(-1) & 1\times1+(-5)\times0+2\times4 & 1\times0+(-5)\times(-1)+2\times1\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}11 & -10 & -4\\ -9 & 9 & 7\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

例 3.

$$\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1 & 1\times3 & 1\times2\\ (-1)\times1 & (-1)\times3 & (-1)\times2\\ 2\times1 & 2\times3 & 2\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ -1 & -3 & -2\\ 2 & 6 & 4\end{bmatrix}$$

例 4.

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix} = 1\times1+3\times(-1)+2\times2=2$$

掛ける順番が違うと結果がちがう.

例題 3 (テキスト 7P). $A=\begin{bmatrix}1&0\\3&0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0&0\\2&1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ とする. (1) 行列 AB, BA を求めて, $AB\neq BA$ であることを確かめよ.

解答 (1) $AB=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix}0&0\\5&0\end{bmatrix}$ である. 従って, $AB\neq BA$. ∎

コメント

行列の掛け算では, 順番が大事！順番を変えると結果が変わる.

定理 2 (行列の積に関する結合法則・分配法則, テキスト 10P). 任意の行列 A, B, C に対して, 次が成り立つ.

(1) $(AB)C=A(BC)$

(2) $A(B+C)=AB+AC,\quad (A+B)C=AC+BC$

(ただし, ここでの和や積の演算は全て定義されているとする.)

証明 成分に分けて直接計算することで示すことができる. 確かめておいてください ∎

4 行列の演算: 転置

定義 10 (転置行列の定義, テキスト 4P). $m\times n$ 行列 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ の行と列を置き換える操作 (転置) により得られる $n\times m$ 行列を A の **転置行列** といい, ${}^tA$ と書く.

すなわち, ${}^tA=[a'_{ij}]_{n\times m}$ とすると, $a'_{ij}=a_{ji}$ である.

転置行列の例

$$A=\begin{bmatrix}1&3&-2\\4&5&2\end{bmatrix},\quad {}^tA=\begin{bmatrix}1&4\\3&5\\-2&2\end{bmatrix}$$

転置行列の性質, テキスト 10P

- n 次列ベクトル ($n\times1$ 行列) の転置 (行列) は n 次行ベクトル ($1\times n$ 行列) である. また, 行ベクトルの転置は列ベクトルである.
- $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\\e&f\end{bmatrix}$ のとき, ${}^tA=\begin{bmatrix}a&c&e\\b&d&f\end{bmatrix}$ である.

- 行列 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ を $A=[\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]$ と列ベクトル表示すると，A の転置行列 ${}^tA$ は，${}^tA=\begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ となる．
- 転置行列の定義から明らかに，${}^t({}^tA)=A$ である．

定理 3 (テキスト 10P)**.** 行列 A, B に対して, 和 $A+B$, スカラー倍 cA, 積 AB が定義されるとき,

(1) ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB.$
(2) ${}^t(cA)=c\,{}^tA.$
(3) ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA.$

が成り立つ

証明 (1), (2) は和・スカラー倍と転置行列の定義から明らかである． (3) $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{n\times l}$ に対して, $AB=C=[c_{ij}]_{m\times l}$ とおく．積の定義から, ${}^t(AB)$ の (i,j) 成分は $c_{ji}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}$ となる．

一方, ${}^tB=\left[b'_{ij}\right]_{l\times n}$, ${}^tA=\left[a'_{ij}\right]_{n\times m}$ とおくと, $b'_{ij}=b_{ji}$, $a'_{ij}=a_{ji}$ である．つまり ${}^tB\,{}^tA$ の (i,j) 成分は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b'_{ik}a'_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}$ である．従って, ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA.$ ∎

5 課題

問題

行列 A, B を

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

とする．

(1) $2A-B$ を求めよ (2) AB と BA を求めよ (3) $AX=B$ となる X を求めよ

6 行列の分割

定義 11 (行列のブロック分割，テキスト 20P)**.** $m\times n$ 行列 A を $k-1$ 本の横線，$l-1$ 本の縦線を入れることで kl 個の区画に分割し，上から i 番目，左から j 番目の区画にある数を行列とみなし A_{ij} $(i=1,\cdots,k;$ $j=1,\cdots,l)$ と書く．すると行列 A は以下のように表せる．

$$A=\left[\begin{array}{c|c|c} A_{11} & \cdots & A_{1l} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline A_{k1} & \cdots & A_{kl} \end{array}\right]$$

このとき，A_{ij} が $m_i\times n_j$ 行列であるとすると，$m=m_1+\cdots+m_k$, $n=n_1+\cdots+n_l$ である．このような分割を行列の **ブロック分割** (あるいは, **小行列分割**) と呼ぶ.

行列 A を定義 11 のように kl 個の $m_i \times n_j$ 行列 A_{ij} で分割した場合，$A = [A_{ij}]_{k \times l}$ などと書くことがある．

例 5. 3×4 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 7 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ のブロック分割として，例えば，

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix},\ A_{12} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix},\ A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \end{bmatrix},\ A_{22} = \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}$$

とおくと，$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 7 & -1 & 3 \\ \hline 2 & -4 & 1 & 6 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ と表すことができる．

例題

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 7 & -1 & 3 \\ \hline 2 & -4 & 1 & 6 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\ B = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -7 \\ -1 & 5 & 0 \\ \hline 4 & 1 & -6 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

とそれぞれブロック分割したときに，積 AB と

$$\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

を比べよ．

$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$, $A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$, $A_{22} = \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}$, $B_{11} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$, $B_{21} = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$, $B_{22} = \begin{bmatrix} 1 & -6 \end{bmatrix}$.

定理 4 (ブロック分割された行列の積，テキスト 22P)**.** 行列 A, B を積 AB が定義されるようなものとして，これらを $A = [A_{ij}]_{m \times n}$, $B = [B_{ij}]_{n \times l}$ と分割する．ただし，各 $k = 1, \cdots, n$ に対して積 $A_{ik}B_{kj}$ $(i = 1, \cdots, m;\ j = 1, \cdots, l)$ が定義されるものとする．このとき，$AB = [C_{ij}]_{m \times l}$ とブロック分割すると，

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + \cdots + A_{in}B_{nj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$$
$$(i = 1, \cdots, m;\ j = 1, \cdots, l)$$

が成り立つ．

証明 行列の積の定義をブロック分割することで証明できる． ∎

コメント，テキスト 7P

このことから, AB が次のように表されることも容易に確かめられる

$$AB = A\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_l\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A\,\boldsymbol{b}_1 & \cdots & A\,\boldsymbol{b}_l\end{bmatrix}\ \text{(列ベクトル表示)},$$

$$AB = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m\end{bmatrix} B = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1\,B\\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m\,B\end{bmatrix}\ \text{(行ベクトル表示)}$$

問題

(1) $A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$, $B = \left[\begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ \hline 1 & -2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix}B_{11}\\ B_{21}\end{bmatrix}$ の積 AB をブロック分割された行列の積の公式を用いて計算せよ.

(2) $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix}$, $B = \left[\begin{array}{c|c} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2\end{bmatrix}$ の積 AB をブロック分割された行列の積の公式を用いて求めよ.

7 正則行列と逆行列

定義 12 (行列の正則性と逆行列)**.** 正方行列 A に対して, 次のような正方行列 X が存在するとき, A は **正則** (あるいは, **可逆**) であるいう:

$$A\,X = XA = E. \tag{1}$$

また, このような X を A の **逆行列** といい, $X = A^{-1}$ と書き表す.

コメント

A が正則であるとき, その逆行列 A^{-1} は唯一つ存在する. これは，もし正方行列 X_1, X_2 が共に上の等式を満たすとすると, $X_1 = X_1E = X_1(A\,X_2) = (X_1A)X_2 = E\,X_2 = X_2$. すなわち, $X_1 = X_2$ が成り立つからである.

行列の正則性

- (正方) 零行列 O_n は正則でない． なぜなら，積の性質より, 任意の正方行列 X に対して $OX = XO = O \neq E$ である.
- 単位行列 E は正則であり, $E^{-1} = E$ である． なぜなら，$EE = E$ となるので，E の逆行列 E^{-1} は E そのもの.
- 一般に，スカラー行列 $c\,E \neq O$ は正則であり, $(c\,E)^{-1} = c^{-1}\,E$ である． なぜなら，$(cE)(c^{-1}E) = cc^{-1}EE = 1E = E$，$(c^{-1}E)(cE) = E$ となるので，cE の逆行列 $(cE)^{-1}$ は，$c^{-1}E$.

定義 13 (行列の正則性と逆行列，テキスト 19P)**.** (1) 2 次正方行列 $A = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ が正則である $\Longleftrightarrow$ $ad - bc \neq 0$． (2) $ad - bc \neq 0$ のとき, A の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

である．

（注意）$\det(A) = ad - bc$ は，行列 A の行列式と呼ばれている．

証明 $X = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ とする．$AX = E$ となるための条件は,

$$AX = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

これを，p, q, r, s についてとくと，$\det(A) = ad - bc \neq 0$ のとき，

$$p = \frac{d}{ad - bc}, \quad q = \frac{-b}{ad - bc}, \quad r = \frac{-c}{ad - bc}, \quad s = \frac{a}{ad - bc}$$

となる．これらをまとめて書くと，

$$A^{-1} = X = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

となる．$\det(A) = 0$ なら逆行列は存在しない． ∎

定理 5 (正則行列の性質，テキスト 18P)**.** 正方行列 A, B は共に正則であるとする．このとき, 次が成り立つ:　(1) A^{-1} は正則であり, $(A^{-1})^{-1} = A$.　(2) ${}^tA$ は正則であり, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.　(3) AB は正則であり, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.　(4) A^m は正則であり, $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$　(m は任意の自然数).

証明 (1) 定義から明らかである．
(2)

$$\begin{aligned} {}^t(A^{-1}){}^tA &= {}^t(AA^{-1}) \\ &= {}^tE = E \end{aligned}$$

${}^tA{}^t(A^{-1}) = E$ に対しても同様．従って, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ である．
(3)

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(B^{-1}B)A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E.$$

$(B^{-1}A^{-1})AB = E$ に対しても同様．従って, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ である．
(4) 数学的帰納法を用いる．$m = 1$ ならば明らか．$m = k$ のとき主張が成り立つとすると，$m = k + 1$ のときは $B = A^k$ として (3) から主張が成り立つことがわかる．よってすべての自然数 m に対して主張は成立する． ∎

例題 4 (テキスト 22P)**.** m 次正方行列 A_{11}, B_{11}, n 次正方行列 A_{22}, B_{22}, $m \times n$ 行列 A_{12}, B_{12}, $O = O_{n\times m}$ に対して, $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ O & B_{22} \end{bmatrix}$ とおく．

(1) AB を計算せよ．

解答: (1) 分割された行列の積の定理より，

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ O & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ O & A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

例題 5 (テキスト 22P). m 次正方行列 A_{11}, B_{11}, n 次正方行列 A_{22}, B_{22}, $m \times n$ 行列 A_{12}, B_{12}, $O = O_{n\times m}$ に対して, $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ O & B_{22} \end{bmatrix}$ とおく.

(2) A_{11}, A_{22} が正則であるならば, A は正則であり, また, このとき, $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$ であることを示せ.

解答 (2) (1) の結果

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ O & A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

から, $AB = E$ となるためには、

$$A_{11}B_{11} = E,\ A_{22}B_{22} = E,\ A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = O$$

となる必要がある. このとき, 逆行列の定義より, $B_{11} = A_{11}^{-1}$, $B_{22} = A_{22}^{-1}$, また, $B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}B_{22}$ $= -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}$ であることから,

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

である. ∎

8 課題

問題

行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & p & q & r \\ 0 & 1 & s & t \\ 0 & 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

9 記号と 2 次，3 次の行列式

定義，テキスト 48P

2 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

の行列式は,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

で定義される.

定義，テキスト 57P
3 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

の行列式は,

$$\begin{aligned} \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

で定義される.

定義 14 (*n 次正方行列の行列式の定義, テキスト 56P*)**.** n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ の行列式は、

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

で定義される.

注意
行列式は他に以下のように表す場合もある.

$$|A|, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, \quad \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m \end{bmatrix} \quad (\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m \text{は } m \text{ 次行ベクトル})$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} \quad (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n \text{は } n \text{ 次列ベクトル})$$

10 行列式の 7 つの性質

定理 6 (行と列の対称性, テキスト 59P)**.** n 次正方行列 A の行列式とその転置行列 ${}^tA$ の行列式は等しい. つまり,

$$\det({}^tA) = \det(A)$$

定理 7 (交代性, テキスト 62P)**.** n 次正方行列の行列式に関して, 以下の (2),(3) が成立する.

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \end{vmatrix} \qquad (3) \quad \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \end{vmatrix} = 0$$

ここで, $\boldsymbol{a}_j (j = 1, \cdots, n)$ は n 次行ベクトルである.

(2), (3) の列ベクトル版:

定理 8 (多重線形性，テキスト 61P)**.** n 次正方行列の行列式に関して，

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{b}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}$$

が成り立つ．ここで，$\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_j (j = 1, \cdots, n)$ は n 次行ベクトルである．

定理 9 (多重線形性，テキスト 61P)**.** n 次正方行列の行列式に関して，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ c\,\boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}$$

が成立する．ここで，$\boldsymbol{a}_j (j = 1, \cdots, n)$ は n 次行ベクトルである．

定理 10 (ある行に別の行の何倍かを加えた行列の行列式，テキスト 63P)**.** n 次正方行列の行列式に関して，以下の式が成立する．

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \end{vmatrix}$$

ここで $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は n 次行ベクトルである．

証明 多重線形性に関する定理と交代性に関する定理を用いる．

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} + k\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ k\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} =$$

∎

定理 11 (0 が並んでいる行列の行列式，テキスト 58P)**.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例 6.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times (2 \times 3 - 2 \times 2) = 6$$

定義 15 (三角行列の定義，テキスト 13P)**.** 正方行列 $A=[a_{ij}]$ に対して，(1) $a_{ij}=0\ (i>j)$ であるとき，A を **上三角行列** という． (2) $a_{ij}=0\ (i<j)$ であるとき，A を **下三角行列** という． これらをまとめて **三角行列** と呼ぶ.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \text{(上三角行列)} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{(下三角行列)}$$

例 7. 先の定理を繰り返し適用すると，上三角行列の行列式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

のように対角成分の積となる． 特に，単位行列 E の行列式は 1 である.

例題 6. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ の行列式を求めよ.

方針 行列式の性質を用いてある行 (または 列) の成分を 0 にしていく．そして第 7 の性質を利用して 3 次正方行列の行列式に帰着させる．同様にして 2 次正方行列の行列式に帰着させて公式を利用. ∎

解答

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= ((-1)\times 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = ((-1)\times 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = ((-1)\times 1\times 1) \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)\times(-6) = 6 \end{aligned}$$

∎

11 課題

問題

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ を計算せよ

(2) 3 次正方行列とその列ベクトル表示を $A = [\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{c}]$ とするとき，行列式 $|4A|$, $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c} \quad \boldsymbol{b} \quad 3\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c}|$ を $|A|$ を用いて表せ.

12 行列の積と行列式

定理 12 (行列の積の行列式，テキスト 66P)**.** n 次正方行列 A と B に対して，

$$\det(AB) = \det A \ \det B$$

次が成り立つ.

コメント

これは,

$$|AB| = |A|\,|B|$$

とも書ける.

証明 $n = 2$ の時に示す. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned}
|AB| &= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} b_{11}b_{12} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} b_{11}b_{22} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} b_{21}b_{12} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} b_{21}b_{22} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

∎

例題 7 (テキスト 66, 67P)**.** 正方行列 A が正則のとき，$\det(A) \neq 0$ を示せ.

解答 逆行列が A^{-1} が存在して，$AA^{-1} = E$ である．この両辺の行列式をとり，行列の積の行列式に関する定理を用いると

$$\begin{aligned}
\det(AA^{-1}) &= \det E = 1 \\
\det(AA^{-1}) &= \det(A) \ \det(A^{-1}).
\end{aligned}$$

これより $\det(A) \neq 0$ で $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ が従う. ∎

13 クラーメルの公式

例題 8 (テキスト 74, 75P)**.** 3 変数の連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

の解を求めよ．

連立一次方程式の行列表現，テキスト 29P

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

とおくとき，行列 A を **係数行列** , 列ベクトル $\boldsymbol{x}$ を **変数ベクトル** , 列ベクトル $\boldsymbol{b}$ を **定数ベクトル** という．

この連立 1 次方程式は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ と書ける．

$\boldsymbol{x}$ が連立 1 次方程式の解ならば以下の式が成立する．

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

この式の行列式を取ると

$$|A|x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

故に，係数行列 A が正則ならば $x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}/|A|$ と求まる．y，z についても同様に求まる．

クラーメルの公式，テキスト 75P

係数行列 A が正則ならば連立 1 次方程式の解は以下のように表される．

$$x=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

定理 13 (クラーメルの公式，テキスト 74P)**.** n 次正則行列 A を係数行列とする連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ の第 i 番目の要素 x_i は，A の第 i 列を $\boldsymbol{b}$ で置き換えた行列 $B_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_{i-1} \ \boldsymbol{b} \ \boldsymbol{a}_{i+1} \cdots \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}$ を用いて，以下の式で与えられる．

$$x_i=\frac{\det(B_i)}{\det(A)}$$

例題 9. クラーメルの公式を用いて，次の連立 1 次方程式の解を求めよ．

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

解答

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=10-3=7\neq 0$$

クラーメルの公式から

$$x_1=\frac{1}{7}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=\frac{1}{7}(6-2)=\frac{4}{7}$$

$$x_2=\frac{1}{7}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=\frac{1}{7}(10-9)=\frac{1}{7}$$

∎

14 課題

問題

クラーメルの公式を用いて，次の連立 1 次方程式の解を求めよ． (1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \\ 1 & -5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

15 行列式の展開

3 次の行列式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

で定義された．これは次のように変形される．

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

これを第 1 行に関する余因子展開という．

定義 16 (余因子，テキスト 70P)**.** n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対して，第 i 行と第 j 列を除いて得られる $n-1$ 次正方行列を A'_{ij} で表すとき，

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A'_{ij})$$

を行列 A の (i,j) **余因子** と呼ぶ.

3 次行列式の第 1 行に関する余因子展開:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ =$$

第 2 列に関する同様な計算は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+0+0 & a_{13} \\ a_{21} & 0+a_{22}+0 & a_{23} \\ a_{31} & 0+0+a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

第 2 列に関する同様な計算は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+0+0 & a_{13} \\ a_{21} & 0+a_{22}+0 & a_{23} \\ a_{31} & 0+0+a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

第 2 行に関する同様な計算は

定理 14 (行列式の余因子展開，テキスト 70P)**.** 3 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ の行列式は，以下のように展開できる．

$$\det(A) = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + a_{i3}\tilde{a}_{i3} \quad (i = 1, 2, 3)$$

これを A の行列式の **第 i 行に関する余因子展開** という． 同様に，

$$\det(A) = a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + a_{3j}\tilde{a}_{3j} \quad (j = 1, 2, 3)$$

とも展開できる．これを **第 j 列に関する余因子展開** という．

定理 15 (行列式の余因子展開，テキスト 70P)**.** n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ の行列式は，以下のように展開できる．

$$\det(A) = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

これを A の行列式の **第 i 行に関する余因子展開** という． 同様に，

$$\det(A) = a_{1j}\tilde{a}_{1j} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nj} \quad (j = 1, \cdots, n)$$

とも展開できる．これを **第 j 列に関する余因子展開** という．

例 8 (テキスト 71P)**.** 第 2 行に関する余因子展開

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 4(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 6(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

第 2 列に関する余因子展開

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 8(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

コメント

0 が多い行または列に注目して余因子展開を行うと，行列式の計算が簡単にできる．

例題 10 (テキスト 71P)**.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ の行列式を余因子展開を用いて求めよ．

解答 第 1 行の余因子展開を用いると．

$$\det(A) = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -14 - 2(-10) = 6$$

$\blacksquare$

16　余因子行列と逆行列

3 次行列式の第 1 行に関する余因子展開:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ここで第 1 行と第 2 行が一致しているとき．これは次のように変形される．

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= 0 \\ \text{右辺} &= a_{21}\tilde{a}_{11} + a_{22}\tilde{a}_{12} + a_{23}\tilde{a}_{13} \end{aligned}$$

3 次行列式の第 2 列に関する余因子展開で第 1 列と第 2 列が一致しているとき

$$0 = a \quad \tilde{a}_{12} + a \quad \tilde{a}_{22} + a \quad \tilde{a}_{32}$$

定理 16 (行列式の余因子展開)**.** 3 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ について以下が成立．

$$a_{i1}\tilde{a}_{j1} + a_{i2}\tilde{a}_{j2} + a_{i3}\tilde{a}_{j3} = \begin{cases} \det(A) & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases} \tag{2}$$

$$a_{1i}\tilde{a}_{1j} + a_{2i}\tilde{a}_{2j} + a_{3i}\tilde{a}_{3j} = \begin{cases} \det(A) & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases} \tag{3}$$

定義 17 (余因子行列，テキスト 71P)**.** n 次正方行列 A の余因子を要素に持つ行列 $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$ を考える．$\tilde{A}$ **の転置行列**

$${}^t\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

を，A の **余因子行列** という．

定理 17 (テキスト 72，73P)**.** n 次正方行列 A の余因子行列を ${}^t\tilde{A}$ とすると以下が成り立つ．

$$A\ {}^t\tilde{A} = {}^t\tilde{A}\ A = \det(A)E$$

特に， $\det(A) \neq 0$ であれば A は正則で，逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}{}^t\tilde{A}$$

で与えられる．

証明 $n=3$ で示す． $A{}^t\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} =$

${}^t\tilde{A}A = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$ ∎

復習

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ は $ad-bc \neq 0$ のとき正則で，逆行列は，

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

となる．

コメント

ここで，$\det A = ad-bc$．余因子行列は，

$${}^t\tilde{A} = \begin{bmatrix} (-1)^{(1+1)}d & (-1)^{(2+1)}b \\ (-1)^{(1+2)}c & (-1)^{(2+2)}a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

例題 11 (テキスト 73P)**.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ の余因子行列と逆行列を求めよ．

解答 行列 A の余因子は，

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7, \quad \tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$
$$\tilde{a}_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad \tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$
$$\tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad \tilde{a}_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

∎

解答 (つづき)

$$\tilde{a}_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 11 \quad \tilde{a}_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$
$$\tilde{a}_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5$$

である． 従って，余因子行列は，

$${}^t\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -1 & 11 \\ -1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

となる． ∎

解答 (つづき) 一方，A の行列式は，$\det(A)=3$ である．余因子行列に関する定理から，A の逆行列は，

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\,{}^t\tilde{A}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-7&-1&11\\-1&-1&2\\4&1&-5\end{bmatrix}$$

∎

17 課題

問題

(1) 余因子展開を用いて，行列 $\begin{bmatrix}a&0&0&\cdots&0&b\\b&a&0&\cdots&0&0\\0&b&a&\cdots&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\vdots&b&a\end{bmatrix}$ の行列式を求めよ． (2) 行列 $\begin{bmatrix}2&2&-4\\1&1&-3\\1&4&5\end{bmatrix}$ の余因子行列と逆行列を求めよ．

(3) 正方行列 A に対して $AX=E$ を満たす正方行列 X が存在すれば，A は正則で X は A の逆行列となることを示せ．

18 行列式の因数分解

例題 12. 行列式 $\begin{vmatrix}1&a&a^3\\1&b&b^3\\1&c&c^3\end{vmatrix}$ を因数分解せよ．

解答 第 2 行と第 3 行からそれぞれ第 1 行を引いて整理する．

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1&a&a^3\\1&b&b^3\\1&c&c^3\end{vmatrix}&=\begin{vmatrix}1&a&a^3\\0&b-a&b^3-a^3\\0&c-a&c^3-a^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b-a&b^3-a^3\\c-a&c^3-a^3\end{vmatrix}\\&=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&b^2+ab+a^2\\1&c^2+ac+a^2\end{vmatrix}\\&=(b-a)(c-a)(c^2+ac-b^2-ab)\\&=(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

∎

例題 13. 行列式 $\begin{vmatrix}a&b&c&d\\b&a&d&c\\c&d&a&b\\d&c&b&a\end{vmatrix}$ を因数分解せよ．

解答 各行を足すと $a+b+c+d$ になっているので，それを利用するために，1 列に 2,3,4 列を加える

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ a+b+c+d & a & d & c \\ a+b+c+d & d & a & b \\ a+b+c+d & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & a & d & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & b & a \end{vmatrix}$$

■

解答 (つづき) 2 行 − 1 行，3 行 − 1 行,4 行 − 1 行

$$\begin{aligned} &= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & a-b & d-c & c-d \\ 0 & d-b & a-c & b-d \\ 0 & c-b & b-c & a-d \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b & d-c & c-d \\ d-b & a-c & b-d \\ c-b & b-c & a-d \end{vmatrix} \end{aligned}$$

■

解答 (つづき) 1 列 +2 列

$$\begin{aligned} &= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b-c+d & d-c & c-d \\ a-b-c+d & a-c & b-d \\ 0 & b-c & a-d \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c+d)(a-b-c+d)\begin{vmatrix} 1 & d-c & c-d \\ 1 & a-c & b-d \\ 0 & b-c & a-d \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c+d)(a-b-c+d)\begin{vmatrix} 1 & d-c & c-d \\ 0 & a-d & b-c \\ 0 & b-c & a-d \end{vmatrix} \end{aligned}$$

■

解答 (つづき)

$$\begin{aligned} &= (a+b+c+d)(a-b-c+d)\begin{vmatrix} a-d & b-c \\ b-c & a-d \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c+d)(a-b-c+d)\{(a-d)^2-(b-c)^2\} \\ &= (a+b+c+d)(a-b-c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d) \end{aligned}$$

■

19 ブロック行列の行列式

定理 18 (テキスト 67P)**.** A を n 次正方行列とする． (1) $A = \begin{bmatrix} E & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$ と分割されるとき，$\det A = \det A_{22}$ である．(2) $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & E \end{bmatrix}$ と分割されるとき，$\det A = \det A_{11}$ である．

証明 例えば n=5 で $A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & a'_{11} & a'_{12} \\ 0 & 1 & 0 & a'_{21} & a'_{22} \\ 0 & 0 & 1 & a'_{31} & a'_{32} \\ \hline 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{11} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} E & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$ とブロック分割されるときは 行列式 (7) の性質を続けて適用すれば $\det(A) = \det A_{22}$ が従う．また,

$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a'_{21} & a'_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a'_{31} & a'_{32} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & E \end{bmatrix}$ とブロック分割されるときは第 5 行に関する余因子展開，その結果に第 4 行に関する余因子展開を適用すれば $\det(A) = \det A_{11}$ が従う． ∎

定理 19 (テキスト 68P)**.** n 次正方行列 A が正方行列 A_{11}，A_{22} を用いて $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$ あるいは $A = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ のように分割されるとき，$\det(A) = \det(A_{11})\det(A_{22})$ である．

証明 転置行列の行列式に関する定理から，$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$ の形に書ける場合を示せば十分である． この場合, $A = \begin{bmatrix} E & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & E \end{bmatrix}$ と積の形に分解できるから, 行列式を取れば $|A| = \begin{vmatrix} E & O \\ O & A_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & E \end{vmatrix}$. これに先程の定理を適用すればよい. ∎

例題 14.

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 12 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -29 \times 17 = -493$$

例題 15. (1) 正方行列 A が n 次正方行列 B, C を用いて $A = \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix}$ と分割されるとき，$\det(A) = \det(B+C)\det(B-C)$ を示せ.

(2) 行列 $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$ の行列式を因数分解せよ.

解答 (1) 行列式の性質 (6) を適用して，$|A| = \begin{vmatrix} B+C & C \\ C+B & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B+C & C \\ O & B-C \end{vmatrix}$. これに定理を適用すればよい.

(2) $\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ \hline c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix}$ と分割されるから，(1) の結果を適用すればよい． ∎

20　課題

問題

次の行列式を因数分解せよ． (1) $\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$, 　(2) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & b & c & d \\ c & c & c & d \\ d & d & d & d \end{vmatrix}$.

21　連立１次方程式の解法

例題 16. 次の連立 1 次方程式が解を持つように a を定め，その時の解を求めよ．

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z &=& 3 \\ x+y+2z &=& 2 \\ 5x+3y+4z &=& a \end{array}\right.$$

解 まず,①，② を入れ替える．

$$\left\{\begin{array}{rcll} 2x+y+z &=& 3 & ① \\ x+y+2z &=& 2 & ② \\ 5x+3y+4z &=& a & ③ \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x+y+2z &=& 2 & ①'=② \\ 2x+y+z &=& 3 & ②'=① \\ 5x+3y+4z &=& a & ③'=③ \end{array}\right.$$

次に ②，③ の x を消去する．

$$\left\{\begin{array}{rcll} x+y+2z &=& 2 & ① \\ 2x+y+z &=& 3 & ② \\ 5x+3y+4z &=& a & ③ \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x+y+2z &=& 2 & ①'=① \\ -y-3z &=& -1 & ②'=②+①\times -2 \\ -2y-6z &=& a-10 & ③'=③+①\times -5 \end{array}\right.$$

∎

解 (つづき)

次に ③ の y を消去する．

$$\left\{\begin{array}{rcll} x+y+2z &=& 2 & ① \\ -y-3z &=& -1 & ② \\ -2y-6z &=& a-10 & ③ \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x+y+2z &=& 2 & ①'=① \\ -y-3z &=& -1 & ②'=② \\ 0 &=& a-8 & ③'=③+②\times -2 \end{array}\right.$$

次に ② を (-1) 倍する．

$$\left\{\begin{array}{rcll} x+y+2z &=& 2 & ① \\ -y-3z &=& -1 & ② \\ 0 &=& a-8 & ③ \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x+y+2z &=& 2 & ①'=① \\ y+3z &=& 1 & ②'=②\times -1 \\ 0 &=& a-8 & ③'=③ \end{array}\right.$$

となる． ∎

解（つづき）

$$\begin{cases} x+y+2\,z &= & 2 & ① \\ y+3\,z &= & 1 & ② \\ 0 &= & a-8 & ③ \end{cases}$$

∎

解（つづき） ここまでの変形操作:

(I) 二つの方程式の順番を入れ替える.

(II) ある方程式を定数 ($\neq 0$) 倍する.

(III) ある方程式に別のある方程式の定数倍を加える.

が解の集合を保存することに注意すれば，$a \neq 8$ のときに最後の連立方程式が解を持たないことから，問題の連立方程式の解は存在しないことが判る．$a = 8$ のときは，$z = t$(任意定数) としてやれば，② より $y = 1 - 3t$．これと，$z = t$ を ① に代入して $x = 2 - (1 - 3t) - 2t = t + 1$．まとめて

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

と解が求まる. ∎

コメント テキスト 28P

連立 1 次方程式を解く際，解の集合を変えないような変形操作を繰り返して未知数を一つづつ消していった．その変形操作は以下の 3 種類に集約できる.

(I) 二つの方程式の順番を入れ替える.

(II) ある方程式を定数 ($\neq 0$) 倍する.

(III) ある方程式に別のある方程式の定数倍を加える.

これらを連立 1 次方程式の **基本操作** と呼ぶ.

いずれの基本操作にも，連立 1 次方程式をひとつ前の状態に戻す基本操作が存在するので，解の集合が保存されている．結局，連立 1 次方程式の解を求めることは，基本操作により変形を繰り返し，より単純な形の連立 1 次方程式に変形することに帰着される.

22 行列の基本変形と連立１次方程式の解法

定義 18 (連立 1 次方程式 テキスト 27P)**.** n 個の変数 (未知数) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関する m 個の 1 次方程式の集合

$$\begin{cases} a_{11}\ \ x_1 + a_{12}\ \ x_2 + \cdots + a_{1n}\ \ x_n &= & b_1 \\ a_{21}\ \ x_1 + a_{22}\ \ x_2 + \cdots + a_{2n}\ \ x_n &= & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n &= & b_m\ . \end{cases}$$

を, **連立 1 次方程式** という. また, 連立 1 次方程式を満たす数の組 $(x_1, \cdots, x_n)$ を，その **解** という. 連立 1 次方程式の解の存在を判定し, 解が存在する場合には全ての解を求めることを，**連立 1 次方程式を解く** という.

定義 19 (係数行列・変数ベクトル・定数ベクトル テキスト 29P)**.** 連立 1 次方程式

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

とおくとき，行列 A を **係数行列**, 列ベクトル $\boldsymbol{x}$ を **変数ベクトル**, 列ベクトル $\boldsymbol{b}$ を **定数ベクトル** という.

コメント
この連立 1 次方程式は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と書ける（行列表現).

定義 20 (拡大係数行列 テキスト 29P)**.** 連立 1 次方程式の，係数行列 A と定数ベクトル $\boldsymbol{b}$ を横に並べてできる $m \times (n+1)$ 行列

$$[\, A \mid \boldsymbol{b} \,] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

を (連立 1 次方程式の) **拡大係数行列** という.

例 9. 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x + y + z &= 3 \\ x + y + 2z &= 2 \\ 5x + 3y + 4z &= a \end{cases}$$

の係数行列および拡大係数行列は, 以下の通りである:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{(係数行列)}, \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & a \end{array}\right] \text{(拡大係数行列)}.$$

この連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x + y + z &= 3 \\ x + y + 2z &= 2 \\ 5x + 3y + 4z &= a \end{cases}$$

を解く過程を，拡大係数行列で表すと以下のようになる.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & a \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & a \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 5 & 3 & 4 & a \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & a-10 \end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-8 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-8 \end{array}\right]$$

連立 1 次方程式の基本操作は，次に定義するような行列の変形とみなすことができる.

定義 21 (行列の基本変形 テキスト 30P)**.** 行列に対する次の 3 種類の操作を **行に関する基本変形** という:

(i) 二つの行ベクトルを入れ替える.
(ii) ある行ベクトルを定数 $(\neq 0)$ 倍する.

(iii) ある行ベクトルに別のある行ベクトルの定数倍を加える．

コメント

基本変形による行列の変形は，前の例のように矢印などで表す．等式 “=” で結んではいけない．

掃き出し法 テキスト 33P

連立１次方程式の解を求めることは，基本操作により変形を繰り返し，より単純な形の連立１次方程式に変形することに帰着されるが，これは対応する拡大係数行列において行に関する基本変形を繰り返し施して階段行列に変形することとみなせる．このような解法を掃き出し法という．

例題 17. 連立１次方程式が解を持つように a を定め，その時の解を求めよ．

(1) $\begin{cases} 2x - y &= 1 \\ x + 16y &= 17 \\ 3x + 2y &= a \end{cases}$, (2) $\begin{cases} x + y + z - u &= 2 \\ 2x + 3y + z - u &= -4 \\ -x + 2y - 4z + 4u &= a \end{cases}$

(1) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 16 & 17 \\ 3 & 2 & a \end{array}\right]$

(2) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & -4 & 4 & a \end{array}\right]$

23 課題

問題

次の連立１次方程式を掃き出し法で解け．

(1) $\begin{cases} x + 2y + 3z &= 4 \\ 2x + 3y + 4z &= 5 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x + 5y + 2z &= -2 \\ 2x + 13y + 3z &= 5 \\ x + 2y + 3z &= 1 \end{cases}$

24 階段行列，階数の定義

定義 22 (階段行列)**.** 以下の条件を満たすような行列を **階段行列** という:

(1) 成分が全て 0 となる行は，そうでない行より下にある．

(2) 各行の最初に現れる非零成分は, 下の行にいくほど右に寄っている．

コメント

テキストでは階段行列の代りに簡約行列を用いて議論を進めている．(テキスト 33，37P)

階段行列の例

階段行列を一般的に書くと以下の様な形をしている.

$$\begin{bmatrix} 0 \cdots 0 & c_{1j_1} & * \cdots * & * & * \cdots * & & * & * \cdots * \\ & 0 & 0 \cdots 0 & c_{2j_2} & * \cdots * & & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ & & & 0 & 0 \cdots 0 & \ddots & * & * \cdots * \\ & & & & & & c_{kj_k} & * \cdots * \\ & & & & & & 0 & 0 \cdots 0 \\ & & & & & & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ & & & & & & 0 & 0 \cdots 0 \end{bmatrix}$$

(ただし, $c_{1j_1} c_{2j_2} \cdots c_{kj_k} \neq 0$. 更に $*$ 印として表された成分はどのような数でもよく, 数字が書かれていない場所には全て 0 が入っているとする).

定義 23 (階数)**.** 階段行列に対して, 段の数を **階数** (rank) という.

例 10.

$$(1) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

定義 24 (行列の階数)**.** 行列 A に基本変形を施して階段行列 B に変形したとき, B の階数のことを, A の **階数** (rank) といい, $\operatorname{rank} A$ と書き表す.

コメント (テキスト 37P)

任意の $m \times n$ 行列 A に対して,

$$\operatorname{rank} A \leq \text{「}m \text{ と } n \text{ の小さい方」}$$

である.

25　基本変形の意味

例題 18. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 10 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ の階数 $\operatorname{rank} A$ を求めよ．

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 10 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ 0 & 7 & -3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

第 2 行を $\frac{1}{2}$ 倍する．

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 10 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

正則行列 $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を左から掛ける．(テキストでは B_1 を $Q_2(\frac{1}{2})$ と表す．(テキスト 31P))

$$B_1 \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 10 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

第 1 行と第 2 行をを入れ替える．

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

正則行列 $B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を左から掛ける．(テキストでは B_2 を P_{12} と表す．(テキスト 31P))

$$B_2 \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

第 2 行に第 1 行の -3 倍を加える．

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

正則行列 $B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を左から掛ける．(テキストでは B_3 を $R_{21}(-3)$) と表す．)

$$B_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & 10 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

例題 19. 基本変形 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ 0 & 7 & -3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ を参考にして

$B_4 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ 0 & 7 & -3 & 10 \end{bmatrix}$

$B_5 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ 0 & 7 & -3 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ を満たす正則行列 B_4，B_5 を求めよ．更に,

$B \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ を満たす行列 B はどうなる？

解答

$B_4 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ 0 & 7 & -3 & 10 \end{bmatrix}$

$B_5 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ 0 & 7 & -3 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ 0 & 7 & -3 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$B_5B_4 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ∎

基本変形

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 10 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ 0 & 7 & -3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

から

$B \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 10 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ を満たす行列 B を求めると...

定理 20. $m \times n$ 行列 A に基本変形を繰り返し施して行列 B が得られたとする．このとき，適当な m 次正則行列 P が存在して $PA = B$ が成立する．

定理 21 (正則性の必要十分条件 テキスト 43P)**.** n 次正方行列 A に対して, 以下は同値である:

(1) A は正則である．

(2) $\operatorname{rank} A = n$.

証明 まず 正方行列 A に基本変形を施して階段行列 B に変形すると，これは上三角行列となることに注意する．しかも，上三角行列の行列式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

のように対角成分の積となる． ∎

証明のつづき $\operatorname{rank} A < n$ ならば階段行列 B の対角成分には少なくともひとつ 0 が入るので．$|B| = 0$. 先程の定理から，適当な正則行列 P を用いて $B = PA$. これから $|A| = 0$ が従う．$\operatorname{rank} A = n$ ならば階段行列 B の対角成分は 0 を持たない．即ち，$|B| \neq 0$. これと $B = PA$，P は正則行列，の関係から，$|A| \neq 0$ を得る． ∎

26 課題

問題

次の行列の階数を求めよ．

$$(1) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad (2) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

27 同次連立１次方程式

定義 25 (同次連立 1 次方程式)**.** $m \times n$ 行列 A に対して, 連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

を **同次連立 1 次方程式** という． この連立 1 次方程式の解 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を **自明な解** といい，それ以外の解を **非自明な解** という．

(注意)

同次連立 1 次方程式は必ず $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を解にもつ．

例題 20. 以下の同次連立 1 次方程式を解け．

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解答

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \end{bmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) \end{bmatrix}$$

∎

a の値	A の階数	連立 1 次方程式	解
1	1	$x+y+z=0$	
-2	2	$\begin{cases} x-2y+z = 0 \\ y-z = 0 \end{cases}$	
それ以外	3	$\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	

a の値	A の階数	解
1	1	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
-2	2	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
それ以外	3	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

定理 22 (テキスト 39，42P)**.** $m \times n$ 行列を A とするとき，同次連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

において $r = \operatorname{rank} A$ とするとき $r \leq n$. 更に,

(i) $r = n$ のとき，解は自明な解に限られる． (ii) $r < n$ のとき，全ての解は，$n - r$ 個の任意定数 $t_1, t_2, \ldots, , t_{n-r}$ と１次独立な解 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-r}$ との１次結合

$$t_1\boldsymbol{v}_1 + t_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + t_{n-r}\boldsymbol{v}_{n-r}$$

で与えられる.

定理 23 (同次連立 1 次方程式が自明な解のみをもつ条件 テキスト 42P)**.** $m \times n$ 行列を A とするとき,

同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が自明な解のみを持つ. $\iff \operatorname{rank} A = n$.

特に $m = n$ の場合は, $\iff$ A は正則行列.

28　一般の連立１次方程式

例題 21. 以下の連立１次方程式を解け.

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}$$

解答

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & a \end{array}\right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & a & a \end{array}\right] \xrightarrow{(2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & a^2-a \\ 0 & 1-a & a-1 & a-1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & a-1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & a^2-a \end{array}\right] \xrightarrow{(4)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & a-1 \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) & 1-a \end{array}\right]$$

∎

a の値	A の階数	拡大係数行列の階数	連立１次方程式	解
1	1	1	$x + y + z = 1$	
-2	2	3	$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ y - z = -1 \\ 0 = 3 \end{cases}$	
それ以外	3	3	$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ y - z = -1 \\ (2+a)z = 1 \end{cases}$	

a の値	A の階数	拡大係数行列の階数	解
1	1	1	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
-2	2	3	
それ以外	3	3	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2+a} \begin{bmatrix} (1+a)^2 \\ -(1+a) \\ 1 \end{bmatrix}$

一般の連立 1 次方程式の解 (まとめ)

A を (m, n) 行列とする．連立 1 次方程式

$$Ax = b \tag{$*$}$$

の解についてまとめると以下のようになる．

- $(*)$ が解を持つ．$\Longleftrightarrow$ 係数行列 A の階数 $=$ 拡大係数行列 $[A|\boldsymbol{b}]$ の階数，(テキスト 37P)
- $(*)$ の一般解 $=$ $(*)$ において $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ とした同次形の一般解 $+$ $(*)$ の解のひとつ．
- $(*)$ の一般解に含まれる任意定数の個数 $=$ 未知数の個数 n $-$ 係数行列 A の階数，(テキスト 39P)
- 「未知数の個数 $n=$ 係数行列 A の階数」のときは解が存在するとしてもただひとつ． 特に，同次形では自明な解のみ．(テキスト 39，42P)

29 課題

問題

次の連立 1 次方程式を解け．

$$(1) \begin{cases} (a+1)x + y + z = 1 \\ x + (a+1)y + z = 1 \\ x + y + (a+1)z = 1 \end{cases}, \quad (2) \begin{cases} x - 2y = 7 \\ 3x + (a+2)y = -9 \\ ax + y = -1 \end{cases}.$$

30 掃き出し法と逆行列の計算

例題 22. 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ．

解

$AX = E$ を満たす行列 $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$ を求める. ∎

解（つづき） $AX = E$ の第一列を取り出して連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_{11} + 2\,x_{21} &= 1 \\ -x_{11} - 3\,x_{21} + x_{31} &= 0 \\ 3\,x_{11} + 4\,x_{21} - 2\,x_{31} &= 0 \end{cases}$$

を掃き出し法で解く.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 \end{array}\right]$$

∎

解（つづき） $AX = E$ の第二列を取り出して連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_{12} + 2\,x_{22} &= 0 \\ -x_{12} - 3\,x_{22} + x_{32} &= 1 \\ 3\,x_{12} + 4\,x_{22} - 2\,x_{32} &= 0 \end{cases}$$

を掃き出し法で解く.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right]$$

∎

解（つづき） $AX = E$ の第三列を取り出して連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_{13} + 2\,x_{23} &= 0 \\ -x_{13} - 3\,x_{23} + x_{33} &= 0 \\ 3\,x_{13} + 4\,x_{23} - 2\,x_{33} &= 1 \end{cases}$$

を掃き出し法で解く.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{同じ基本変形}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & ? \\ 0 & 1 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 1 & ? \end{array}\right]$$

∎

解（つづき） $AX = E$ の各列を取り出して連立 1 次方程式を解く代りに

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{同じ基本変形}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & 1/2 & -1/4 \end{array}\right]
$$

∎

逆行列の計算法 (まとめ)

$$
A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1,\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_n
$$

の解を簡約化を用いて求める

$$
\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{e}_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} E & \boldsymbol{c}_1 \end{bmatrix},\ \cdots,\ \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} E & \boldsymbol{c}_n \end{bmatrix}
$$

これらをまとめて行列表現すると

$$
\begin{bmatrix} A & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} E & \boldsymbol{c}_1 & \cdots & \boldsymbol{c}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & A^{-1} \end{bmatrix}
$$

31　課題

問題

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ を基本行列の積で表せ.

32　置換

定義 26 (置換 テキスト 49P)**.** n 個の文字 $\{1, 2, \ldots, n\}$ から $\{1, 2, \ldots, n\}$ への一対一の対応を n 文字の **置換** という. n 文字の置換 σ が $1, \cdots, n$ をそれぞれ $k_1, \cdots, k_n$ ($k_1, \cdots, k_n$ は $1, \cdots, n$ を並べ替えたもの) に対応させることを

$$
\sigma(1) = k_1,\ \ \sigma(2) = k_2,\ \ \cdots, \sigma(n) = k_n
$$

と書き, このとき σ を以下のように表す.

$$
\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}
$$

注意

その対応関係が分かれば列の順序は入れ替えても良い. また, 変化しない文字は省略しても良い.

例 11.

$$\begin{aligned}\sigma(1) &= 3 \quad (1 \text{ を } 3 \text{ に移す}) \\ \sigma(2) &= 2 \quad (2 \text{ を } 2 \text{ に移す}) \\ \sigma(3) &= 4 \quad (3 \text{ を } 4 \text{ に移す}) \\ \sigma(4) &= 1 \quad (4 \text{ を } 1 \text{ に移す})\end{aligned}$$

のとき，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

定義 27 (置換全体の集合 テキスト 55P)**.** n 文字の置換全体の集合を S_n と書く．

コメント

n 文字の置換は，$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$ と書け，n 文字の並べ替え $k_1, k_2, \ldots, k_n$ が決まれば一意に定まる． n 文字の並べ替え方は $n!$ 個あるので，S_n の元の個数は $n!$ 個である．

例 12. 3 文字の置換は $3! = 6$ 個ある．具体的に書くと以下のようになる．

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

これらは S_3 の元である．

定義 28 (置換の積 テキスト 50P)**.** 2 つの n 文字の置換 σ と τ に対して，積 $\sigma\tau$ を

$$\sigma\tau(i) = \sigma(\tau(i)) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

で定義する．

例 13. 2 つの 3 文字の置換

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

の積 $\sigma_1\sigma_3$ と $\sigma_3\sigma_1$ を考えると，

$$\begin{aligned}\sigma_1\sigma_3(1) &= \sigma_1(\sigma_3(1)) = \sigma_1(3) = 1, \quad \sigma_3\sigma_1(1) = 2 \\ \sigma_1\sigma_3(2) &= \sigma_1(\sigma_3(2)) = \sigma_1(2) = 3, \quad \sigma_3\sigma_1(2) = 1 \\ \sigma_1\sigma_3(3) &= \sigma_1(\sigma_3(3)) = \sigma_1(1) = 2, \quad \sigma_3\sigma_1(3) = 3\end{aligned}$$

であるから，

$$\sigma_1\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_5, \quad \sigma_3\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \sigma_4$$

となる．特に $\sigma_1\sigma_3 \neq \sigma_3\sigma_1$ である．

交換可能性と結合法則 テキスト 50P

- 一般に置換の積は交換できないが，移動する文字を共有しない 2 つの置換は交換可能である． 例えば,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

  の場合,

$$\sigma\tau = \tau\sigma$$

  である.
- 置換の積には結合法則

$$\sigma(\tau\nu) = (\sigma\tau)\nu$$

  が成り立つ.

定義 29 (恒等置換 テキスト 51P)**.** 全ての文字を動かさない置換

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

を **恒等置換** という.

定義 30 (逆置換 テキスト 51P)**.** 置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

の **逆置換** を

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

で定義する.

コメント

逆置換は文字の移動を元に戻す置換であるから,

$$\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = \varepsilon$$

例 14. 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の逆置換は,

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma^{-1}(1) & \sigma^{-1}(2) & \sigma^{-1}(3) & \sigma^{-1}(4) \end{pmatrix}$$

となる.

定義 31 (巡回置換 テキスト 51P)**.** n 文字 $\{1, 2, \cdots, n\}$ から取り出した互いに異なる $r(\leq n)$ 個の文字列 $k_1, \ldots, k_r$ に対し，一つ右の文字を対応させる置換 (ただし k_r は k_1 に対応させる)

$$\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_{r-1} & k_r \\ k_2 & k_3 & \cdots & k_r & k_1 \end{pmatrix}$$

を (r 次の) **巡回置換** という． これを簡単のため $\sigma = (k_1\ k_2\ \cdots\ k_r)$ と書く.

例 15. 5 文字の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，及び 7 文字の置換 $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ は 巡回置換でどちらも，$\sigma = (2\ 5\ 3)$，$\tau = (2\ 5\ 3)$ と書く．

また，これらは $(5\ 3\ 2)$，あるいは $(3\ 2\ 5)$ と書いても同じ巡回置換を意味する．

例題 23 (置換を巡回置換の積で表わす．テキスト 52P)**.** 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ を巡回置換の積で表せ．

解答 左の文字から考えていく．1 は変わらない．2 から順番に辿ると $\sigma(2) = 3, \sigma(3) = 5, \sigma(5) = 2$. これらに現れない文字 4 から順番に辿ると $\sigma(4) = 7, \sigma(7) = 6, \sigma(6) = 4$. 残った文字 8 は変わらない．したがって，$\sigma = (2\ 3\ 5)(4\ 7\ 6)(= (4\ 7\ 6)(2\ 3\ 5))$. ∎

定義 32 (互換 テキスト 52P)**.** 2 文字の巡回置換，つまり，2 文字を入れ替え，他を動かさない置換を **互換** という．文字 i と j の互換は $(i\ j)$ である．

コメント

定義から $(i\ j) = (j\ i)$ である．

例 16 (テキスト 53P)**.** (1) 互換 τ の逆置換は τ 自身である． (2) n 文字の置換 σ に対して，$\sigma' = (n\ \sigma(n))\sigma$ は，$\sigma'(n) = n$ となるので $(n-1)$ 文字の置換と考えることができる． (3) 巡回置換 $\sigma = (k_1\ k_2\ \cdots k_r)$ は，

$$\sigma = (k_1\ k_r)(k_1\ k_2 \cdots k_{r-1}) = \cdots = (k_1\ k_r)(k_1\ k_{r-1}) \cdots (k_1\ k_2)$$

のように互換の積で表すことができる．

例 17. 7 文字の置換 $(3\ 6\ 5\ 7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ に (3) の公式を適用すると $(3\ 6\ 5\ 7) = (3\ 7)(3\ 6\ 5)$ となる．実際, $\sigma = (3\ 7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $\tau = (3\ 6\ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ とすると, $\sigma\tau(k) = k$，$k = 1, 2, 4$，$\sigma\tau(3) = \sigma(\tau(3)) = \sigma(6) = 6$，$\sigma\tau(6) = 5$，$\sigma\tau(5) = 7$，$\sigma\tau(7) = 3$. となるので，$\sigma\tau = (3\ 6\ 5\ 7)$．同様に，$(3\ 6\ 5) = (3\ 5)(3\ 6)$ となり，巡回置換 $(3\ 6\ 5\ 7)$ は互換の積 $(3\ 7)(3\ 5)(3\ 6)$ に等しいことになる．

定理 24 (置換の分解 テキスト 53P)**.** (1) 任意の置換は巡回置換の積で表すことができる． (2) 任意の置換は互換の積で表すことができる．

注意

互換の積で置換を表すとき, その表し方は 1 通りではない．例えば a, b, c, d をすべて異なる文字とするとき, 以下が成り立つ． (1) $(a\,c\,b) = (b\,c)(a\,b) = (a\,c)(b\,c)$ (2) $(a\,b\,c\,d) = (a\,d)(a\,c)(a\,b) = (a\,b)(c\,d)(a\,d)(b\,d)(a\,b)$

33 置換の符号

定義 33 (置換の符号)**.** 置換 σ が m 個の互換の積で表されるとき，**置換の符号** を

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^m$$

で定義する．ただし，恒等置換 ε の符号は $\mathrm{sgn}(\varepsilon) = 1$ と定義する．

定理 25 (置換の符号は一意に定まる テキスト 54P)**.** 置換 σ を互換の積で $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$ と表した場合，k の偶奇は表し方に寄らず一定になる．つまり，置換の符号は一意に定まる．

置換の符号の性質 テキスト 54P

- 置換 σ が k 個の互換の積で表され，置換 τ が l 個の互換の積で表されるなら，置換の積 $\sigma\tau$ は $k+l$ 個の互換の積で表される． つまり，

$$\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = (-1)^{k+l} = (-1)^k(-1)^l = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)$$

  が成り立つ．
- また, 置換 σ とその逆置換の積は恒等置換であり, $\sigma\sigma^{-1} = \varepsilon$ となる． つまり, $\mathrm{sgn}(\sigma\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\varepsilon) = 1$ となる． この左辺は，$\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\sigma^{-1})$ であるから,

$$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{sgn}(\sigma)} = \mathrm{sgn}(\sigma)$$

  となり，逆置換の符号は元の置換の符号と等しい．

定義 34 (偶置換と奇置換 テキスト 55P)**.** 置換 σ が $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ を満たすとき，σ を **偶置換** という． また，$\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ を満たすとき，σ を **奇置換** という．

例題 24 (テキスト 55P)**.** 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ を互換の積に分解し，符号を求めよ．

解答 置換 σ は $\sigma = (1\ 4\ 3\ 7)(2\ 6\ 5)$ のように巡回置換の積に分解できる．それぞれの巡回置換を互換の積に分解すると

$$\sigma = (1\ 7)(1\ 3)(1\ 4)(2\ 5)(2\ 6)$$

となる． この結果から，置換 σ の符号は $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^5 = -1$ となる． つまり，置換 σ は奇置換である．
∎

34 行列式の定義

定義 35 (n 次正方行列の行列式)**.** n 次正方行列 $A = \left[a_{ij}\right]$ に対して以下で定まる量を A の行列式と言い，$\det A$ で表す．

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

と定義する．

コメント
S を集合とするとき，$\sum_{p \in S} f(p)$ は，集合の要素全てに対して $f(p)$ を計算し，和を取る操作を意味する．例えば $S = \{2, 3, 5\}, f(p) = \log p$ のとき，

$$\sum_{p \in S} f(p) = \log 2 + \log 3 + \log 5$$

例 18. • $S_2 = \{\varepsilon, \sigma = (1\ 2)\}$ S_2 の元の数 $2! = 2$

- 置換の符号

$$\mathrm{sgn}(\varepsilon) = 1, \quad \mathrm{sgn}(\sigma) = -1$$

- これから

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}(\varepsilon) a_{1\varepsilon(1)} a_{2\varepsilon(2)} + \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3 文字の置換の全体の集合 S_3 は $3! = 6$ 個の元を持ち， $S_3 = \{\sigma_0,\, \sigma_1,\, \sigma_2,\, \sigma_3\, \sigma_4,\, \sigma_5\}$，ただし，

$$\sigma_0 = \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

このとき， $\mathrm{sgn}(\sigma_0) = \mathrm{sgn}(\sigma_1) = \mathrm{sgn}(\sigma_2) = 1$，$\mathrm{sgn}(\sigma_3) = \mathrm{sgn}(\sigma_4) = \mathrm{sgn}(\sigma_5) = -1$ となる．

例 19. S_3 の元は先の例で示した．これより 3 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ の行列式は,

$$\begin{aligned} \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \sum_{i=0}^{5} \mathrm{sgn}(\sigma_i) a_{1\sigma_i(1)} a_{2\sigma_i(2)} a_{3\sigma_i(3)} \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma_0) a_{1\sigma_0(1)} a_{2\sigma_0(2)} a_{3\sigma_0(3)} + \mathrm{sgn}(\sigma_1) a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} a_{3\sigma_1(3)} + \mathrm{sgn}(\sigma_2) a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} a_{3\sigma_2(3)} \\ &\quad + \mathrm{sgn}(\sigma_3) a_{1\sigma_3(1)} a_{2\sigma_3(2)} a_{3\sigma_3(3)} + \mathrm{sgn}(\sigma_4) a_{1\sigma_4(1)} a_{2\sigma_4(2)} a_{3\sigma_4(3)} + \mathrm{sgn}(\sigma_5) a_{1\sigma_5(1)} a_{2\sigma_5(2)} a_{3\sigma_5(3)} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

定理 26 (行と列の対称性 テキスト 59P)**.** n 次正方行列 A の行列式とその転置行列 ${}^tA$ の行列式は等しい．つまり,

$$\det({}^tA) = \det(A)$$

証明 以下 $n = 3$ で考える． $A = \left[a_{ij}\right]$, ${}^tA = \left[b_{ij}\right]$ とすると

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} b_{3\sigma(3)},$$

転置行列の定義から $b_{ij} = a_{ji}$ である．したがって,

$$= \sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3}$$

∎

証明 (つづき) ここで，各項 $a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3}$ に表れる置換は $\begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ で，これは σ の逆置換 σ^{-1} となっている．実際この置換と σ との積を取ると,

$$\begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) \end{pmatrix} = \varepsilon$$

が成立する．つまり，

$$\sum_{\sigma\in S_3}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3}=\sum_{\sigma\in S_3}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma^{-1}(1)}a_{2\sigma^{-1}(2)}a_{3\sigma^{-1}(3)}$$

逆置換の符号は元の置換の符号と等しいから，

$$=\sum_{\sigma\in S_3}\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})a_{1\sigma^{-1}(1)}a_{2\sigma^{-1}(2)}a_{3\sigma^{-1}(3)}$$

∎

証明 (つづき)

さらに，σ が S_3 のすべての元を動くとき，その逆置換 σ^{-1} も S_3 のすべての元を動く． 実際，$\sigma_0\to\sigma_0^{-1}=\sigma_0$，$\sigma_1\to\sigma_1^{-1}=\sigma_2$，$\sigma_2\to\sigma_2^{-1}=\sigma_1$，$\sigma_3\to\sigma_3^{-1}=\sigma_3$，$\sigma_4\to\sigma_4^{-1}=\sigma_4$，$\sigma_5\to\sigma_5^{-1}=\sigma_5$．結局，

$$\det({}^tA)=\sum_{\sigma\in S_3}\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})a_{1\sigma^{-1}(1)}a_{2\sigma^{-1}(2)}a_{3\sigma^{-1}(3)}$$

$\tau=\sigma^{-1}$ と書き換えて，

$$=\sum_{\tau\in S_3}\operatorname{sgn}(\tau)a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}=\det(A)$$

となる． ∎

35 課題

問題

(1) 次の置換を互換の積で表し，符号を求めよ． $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&6&2&5&4&1\end{pmatrix}$， $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&5&6&1&3&2&4\end{pmatrix}$．

(2) 4 次の行列式 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$ を定義に従って書き下せ．