

中等教育研究開発室年報 第36号（2023年3月31日発行）別冊電子版  
2022年度 授業実践事例

数学科 中学校第3学年

塩山の稜線（図形に関する課題学習）

授業者 黒木 雄大

（教育研究大会 公開授業）

広島大学附属中・高等学校

## 中学校 数学科 学習指導案

指導者 黒木 雄大

- 日時** 令和4年11月26日(土) 第2限 10:35~11:25
- 場所** 数学教室
- 学年・組** 中学校3年C組 42人
- 題材** 塩山の稜線(図形に関する課題学習)
- 目標**
1. 塩山の稜線を平面に投影した図形の性質を理解している。(知識・技能)
  2. 三角形を土台とした塩山の稜線から性質を見だし、それをもとに様々な稜線の説明をすることができ、塩山の開発に活用することができる。(思考・判断・表現)
  3. 塩山の稜線を粘り強く考察し、その過程を、塩山の開発に生かそうとしている。  
(主体的に学習に取り組む態度)

### 指導計画 (全3時間)

- |              |              |
|--------------|--------------|
| 第一次 塩山の稜線の考察 | 2時間 (本時 2/2) |
| 第二次 塩山の開発    | 1時間          |

### 授業について

平面図形については、中学校において、基本的な作図、二等辺三角形や平行四辺形の性質、円周角、合同や相似、三平方の定理、証明の仕方など基本的な事柄について学習してきた。本題材は、中学校での図形の学習が一通り済んだ段階で、塩山の稜線を考察し、その考察をもとにした独自の塩山の開発を内容とした課題学習を位置づけたものである。

塩山の稜線とは、土台となる平面図形の板の上に塩を最大限まで盛ったときに形成される山の面と面の境界線や頂点のことである。塩山の稜線を平面に投影した図形からは、その図形のもつ性質を見出す数学的活動が展開できる。また、土台の平面図形を変えることで、その上に形成される塩山の形状を推測し、探究できる教材でもある。このように、塩山は具体と抽象の間を往還する活動教材として、STEAM教育における教材としても可能性を秘めている。

本時は、様々な塩山の稜線を考察し、その活用を目指す。本時のねらいは、三角形を土台とした塩山の稜線を、平面に投影した図形によって考察することで、稜線は角の二等分線であることを見だし、さらに、凹五角形を土台とした塩山の稜線について考察することで、塩山の原理から放物線の図形的な定義を獲得することである。最終的には、他の土台だどどのような稜線を形成する塩山ができるか新たな問いを立て、次時の塩山の開発に向けた時間としたい。このような学習活動を通して、思考力や判断力などを高めるとともに、身の回りの事象に対して数学的な視点から分析、考察する態度を育み、学びに向かう力を伸ばしていきたい。

### 題目 塩山の稜線の考察

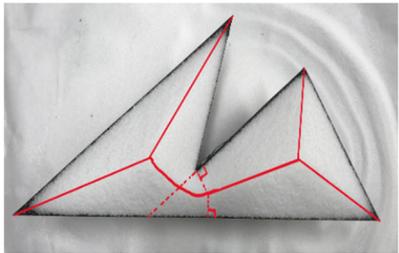
#### 本時の目標

三角形を土台とした塩山の稜線について、平面に投影した図形をもとに考察することで、稜線は角の二等分線であることを見だし、さらに、凹五角形を土台とした塩山の稜線について考察することで、塩山の原理から放物線の図形的な定義を獲得することができる。

#### 本時の評価規準 (観点/方法)

1. 三角形を土台とした塩山の稜線について、平面に投影した図形をもとに考察することを通して、稜線は角の二等分線であることを説明することができる。(思考・判断・表現/学習活動の様子を観察)
2. 凹五角形を土台とした塩山の稜線の曲線部分が、放物線になることを確認し説明することができる。(思考・判断・表現/ワークシートの記述)

## 本時の学習指導過程

学習内容	学習活動	指導上の留意点
(導入) ・前時の振り返りと本時のめあての提示 (5分)	○前時に作った三角形の土台にできる塩山を観察し、稜線ができることを知る。 ○他の平面図形を土台とした塩山の稜線について関心をもつ。	・塩山を真上から撮影した写真を提示し、平面図形として捉えさせる。
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px auto; width: fit-content;">             めあて 塩山の稜線には、どのような図形の性質があるか探ろう。           </div>		
(展開) ・塩山の稜線の予想 (10分)  ・凹五角形の土台でできる塩山の稜線の考察 (10分) <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block; margin-top: 5px;">受け入れる</div>	○三角形の土台にできた塩山の稜線をもとに、凹五角形の土台にできる塩山の稜線を予想する。  ○凹五角形の土台の上に塩を盛り、稜線を確認する。 <div style="text-align: center; margin: 10px 0;">  </div>	・「塩は最も距離の近いところに落ちる」塩山の原理から、三角形の各辺からの距離が等しい点の集合が直線となる、つまり三角形の土台にできた塩山の稜線は角の二等分線であることを見いださせる。 ・塩山を真上から PC で撮影させ、予想した稜線と実際に形成される稜線との間に生まれるズレに着目し、稜線の曲線部分が、どのような曲線なのか探究すべき課題を焦点化する。
・塩山の稜線の曲線部分の検討 (20分)	○塩山を真上から撮影した写真を GeoGebra に貼り付け、曲線が放物線かどうか調べる。	・曲線部分が放物線であれば、その放物線の対称の軸 $y$ 軸に、頂点を原点と設定することで、関数 $y = ax^2$ のグラフとして見ることができることを確認する。 ・三平方の定理を用いることで、関数 $y = ax^2$ の式を導出させる。 ・放物線は、定点と、定点を通らない定直線からの距離が等しい点の集合であることを捉えさせ、図形的に定義する。
(まとめ) ・塩山の開発へ向けた活動 (5分) <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block; margin-top: 5px;">追求する</div>	○授業の感想をかく。 ○他の平面図形を土台とした塩山の稜線について考える。	・塩山の稜線を予想し、土台を各自で制作する、塩山の開発を行う次時の課題学習へと繋げる。
備考 図形アプリケーション：「GeoGebra」 <a href="https://www.geogebra.org/">https://www.geogebra.org/</a> 準備物：PC（生徒用・教師用）、ワークシート、塩、穴あきボウル、トレー、凹五角形の土台（発泡ポリスチレンパネル）、紙コップ、模造紙		

## 実践上の留意点

本実践は、中学校数学科の課題学習として、塩山の稜線を題材とした授業を提案するものである。塩山の題材は、黒田（2000）によって考案された。高等学校の数学の教科書にも掲載されているように、これまでに高等学校数学科の授業の題材や、高校生の課題研究のテーマとして、たびたび取り扱われてきた。塩山の稜線の考察は、問題解決の過程で高等学校数学科の学習内容に迫る、いわば中高の接続性の高い学習を行うことができる。例えば、三角形を土台とした塩山からは、角の二等分線は2辺から等距離の点の集合であることや三角形の内心について、塩山に稜線ができる原理から学ぶことができる。このように、塩山に稜線ができる原理から考察していくと、中学生でも比較的容易に高等学校で学習する数学の知識を獲得できる。さらに新たな知識の獲得は生徒の高揚感を高めるものとしても期待できる。

本実践を行うにあたって、留意した点は次の3点である。

(1) 塩山の稜線の自然な発見を促す学習問題……第一次 1/2 の学習問題

(2) 中高接続を意識した学習問題……第一次 2/2 の学習問題（本時）

(3) 塩山の開発を目指す発展的な学習問題……第二次 1/1 の学習問題

(2)については、前頁までの学習指導案で確認いただきたい。なお、(2)の学習問題の解説を後頁に記載する（補足資料参照）。ここでは、(1)、(3)に設定した学習問題について述べる。

(1) 塩山の稜線の自然な発見を促す学習問題

三角形に切った板（三角形の土台）の上に、塩をもうこれ以上盛れなくなるまでかけ続けると、最後はどうなるでしょうか。

中学生らしい自由な発想を大切にするために、前時では上の学習問題を提示したい。5, 6人ずつの小グループで予想させ、3種類の三角形（正三角形、直角三角形、不等辺三角形）の土台に塩山を作成し観察させる。予想では、境界のない平面に塩を盛ると円錐ができることを想起させ、その根拠とさせる。観察して気づいたことや疑問に思ったことなどは文字や写真で自由に記録させる。塩山の多面的な見方を促すことで、その塩山の構造に着目し、線（三角錐の辺）や点（三角錐の頂点）として現れる稜線の存在に気づき、その稜線のもつ図形的な性質について考察できる。

(3) 塩山の開発を目指す発展的な学習問題

誰も山があつたら登りたくなるように、塩山の頂点には旗を突き刺したくなる。そこで、班の人数全員分の旗を塩山の頂点に突き刺すことができるような塩山を作成しなさい。ただし、土台とする発泡ポリスチレンパネルは1枚（300mm×450mm（約））しか予算の都合上渡せないで、失敗は許されない。作りたい塩山の稜線を予想し、その予想に基づいて土台を作成すること。※制限時間はこの授業の時間内です。

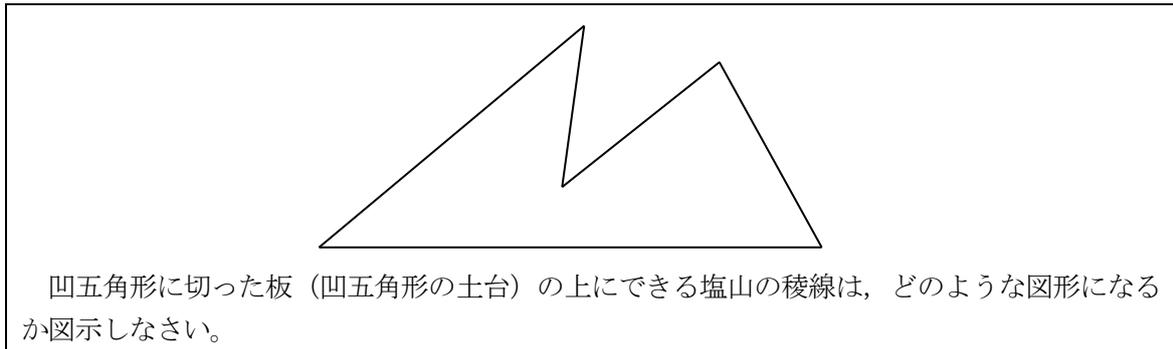
本時の授業は「他の土台だとどのような塩山の稜線ができるか」といった発展的な問いを立てやすい。そこで、次時では上の学習問題を提示し、他の平面図形を土台とした塩山の稜線について予想し、その塩山の開発を試みさせたい。また、活動の様子は文字や写真などで記録させる。この問題は、平面で塩山の稜線を予想することと、空間で塩山を作成することとの間にギャップがあり、生徒の空間認識力を高めることが期待できる。さらに、制限のある問題だからこそ、より現実的な場面で問題解決する力を養うものでもあると考える。

## 引用文献・参考文献

- ・黒田俊郎、「塩が教える幾何学」、日本数学協会編『数学文化』、第37号、2022年、西三数学サークル、2000年、47-56頁
- ・根上生也、桜井進、佐藤大器、清水克彦、妹尾浩也、中本敦浩 編、『数学活用』、啓林館、2020年、26-27頁

## 補足資料

### (2) 中高接続を意識した学習問題



前時を踏まえ、三角形の土台にできる塩山の稜線をもとに、2つの三角形を重ね合わせてできる凹五角形の土台にできる塩山の稜線について考える学習問題を設定した。この問題は左右の三角形の内心  $F$ 、 $G$  の間はどのような稜線ができるかという問いに焦点化できる（図1）。

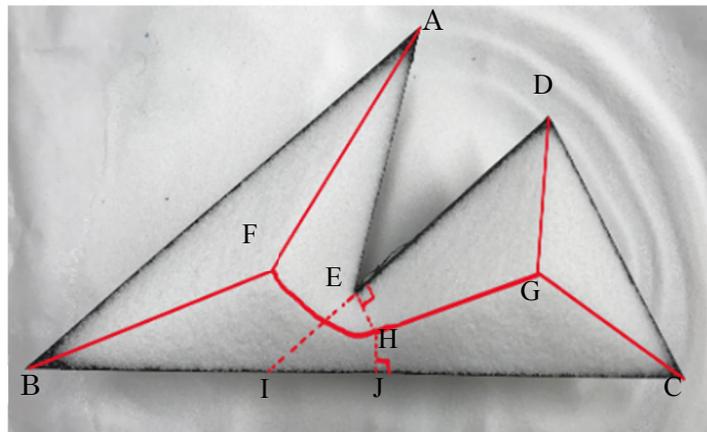


図1 凹五角形の土台にできる塩山の稜線

塩はいちばん距離の近いところに落ちるといふ塩山の原理より、線分  $GH$  は  $\angle DIC$  の二等分線、点  $F$  は  $FE=FI$  の点、点  $H$  は  $HE=HJ$  の点である。さらに、曲線  $FH$  は線分  $BC$  と点  $E$  との等距離のところで均衡がとれた点の集合と考えることができる。つまり、点  $E$  を焦点、線分  $BC$  を準線とする放物線を描くことが分かる。

